

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS



ANALÍTICA PRESCRIPTIVA BASADA EN INTELIGENCIA
COMPUTACIONAL PARA MAXIMIZAR LA RENTABILIDAD

ARMANDO DE JESÚS MEZA ANGULO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

PROFESOR GUÍA: JUAN PÉREZ R., PhD

SANTIAGO, SEPTIEMBRE DE 2024

Dedicatoria

A Dios, por concederme la vida con todas mis virtudes y defectos.

A mis padres, Armando e Hilda, por el amor incondicional, los valores que me inculcaron, el hogar que me dieron, y por enseñarme que la educación es el camino hacia el crecimiento personal y la superación.

A mi hijo, Ángel Andrés, el más grande regalo que Dios y la vida me han dado. Gracias por tu amor, que me sostiene cuando las fuerzas me fallan, y por motivarme a seguir alcanzando mis sueños.

A Sandra Patricia, mi esposa y madre de mi hijo, quien me motivó y animó a continuar estudiando y mejorando, impulsándome a crecer tanto en lo personal como en lo profesional.

A la familia Castillo Rodelo, quienes se convirtieron en mi familia en Chile.

A todos mis familiares y amigos, en especial a aquellos que creyeron en mí: Pbro. Héctor, Sergio, Jorge, Juan Ricardo, Ramón, Teresa, David, Nelson, Patricio, Ángel, María Luz, Paolo, Rodrigo, Álex, Miriam, René, Mario, Francisco, Sonia, Ricardo, Carmen, Maritza, Tony, María Inés, Juanjo, Chris, Alejo, Alfonso, y tantos otros que, aunque no mencionados aquí, son igualmente valiosos.

Con especial afecto, dedico este trabajo a la memoria de mi tía Cira, cuya ausencia se siente profundamente en este día tan significativo.



"I always knew you would succeed. From eternity, I bless your steps. May your achievements be for the glory of God."

Resumen

En el contexto actual, las organizaciones enfrentan desafíos en su proceso de toma de decisiones. La dinámica del mercado, la variabilidad en la demanda y la competencia exigen enfoques más sofisticados. La toma de decisiones debe considerar múltiples criterios y gestionar la incertidumbre en la información. Por lo tanto, la capacidad de implementar modelos analíticos y metodologías robustas es fundamental para optimizar operaciones y maximizar rentabilidad.

Esta tesis propone modelos y metodologías para mejorar la gestión de productos sustitutos y las estrategias de retención de clientes en entornos empresariales dinámicos con información limitada. Se presentan dos investigaciones interrelacionadas que convergen en optimizar la toma de decisiones, además de una tercera en desarrollo.

La primera investigación optimiza la utilidad del consumidor mediante un modelo dinámico de *lot-sizing*, para maximizar las ganancias al optimizar precio, producción y almacenamiento. El modelo emplea un algoritmo de *Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)* para determinar óptimamente estos parámetros, a través de ecuaciones de punto fijo. Se abordan conjuntamente decisiones de almacenamiento, producción y fijación de precios de productos sustitutos en un marco innovador. La *contribución* es *científica aplicada*, desarrollando un modelo que integra un análisis multiproducto y considera la demanda no fija y probabilística, contrastando con modelos tradicionales de demanda determinista. Este enfoque representa más realísticamente las decisiones de los consumidores, mejorando la respuesta empresarial, proporcionando soluciones prácticas para la gestión de inventarios y precios en mercados competitivos.

La segunda investigación diseña y optimiza campañas de retención de clientes, mediante un *Sistema de Inferencia Difusa tipo Mamdani* y modelos de optimización que consideran el abandono de clientes (*churn*) en función de un *umbral de decisión*. Este enfoque maximiza la utilidad de las campañas basándose en el análisis de la información del cliente y los retornos marginales. Esta *contribución es metodológica*, desarrollando técnicas para categorizar clientes según su propensión a abandonar, permitiendo estrategias de retención más efectivas. Al ajustar intervenciones según el comportamiento previsto, esta metodología maneja la incertidumbre en la información, clave en la toma de decisiones en entornos dinámicos.

Los resultados en simulaciones numéricas demuestran la efectividad y adaptabilidad de ambos modelos en distintos contextos, destacando su relevancia en la toma de decisiones. Finalmente, se proponen futuras extensiones como algoritmos paralelizados y validación empírica. En resumen, esta tesis ofrece herramientas aplicables en el ámbito empresarial para mejorar la toma de decisiones y optimizar la utilidad.

Abstract

In the current context, organizations face challenges in their decision-making processes. The dynamics of the market, variability in demand, and competition demand more sophisticated approaches. Decision-making must consider multiple criteria and manage uncertainty in information. Therefore, implementing analytical models and robust methodologies is fundamental to optimize operations and maximize profitability.

This thesis proposes models and methodologies to improve the management of substitute products and customer retention strategies, improving decision-making in dynamic business environments with limited information. Two interrelated investigations are presented that converge in optimizing decision-making, each contributing scientific contributions and a third in development.

The first investigation optimizes consumer utility through a dynamic *lot-sizing* model to maximize profits by optimizing price, production, and storage. The model employs a *Particle Swarm Optimization* (PSO) algorithm to determine these parameters optimally through fixed-point equations. Storage, production, and pricing decisions of substitute products are jointly addressed in an innovative framework. The *contribution* is *applied scientific*, developing a model that integrates a multi-product analysis and considers non-fixed and probabilistic demand, contrasting with traditional models of deterministic demand. This approach represents the decisions of consumers more realistically, improving business respond and providing practical solutions for inventory and pricing management in a competitive markets.

The second investigation designs and optimizes customer retention campaigns through a *Mamdani-type Fuzzy Inference System* and optimization models that consider customer abandonment (churn) based on a *decision threshold*. This approach maximizes the utility of the campaigns based on the analysis of customer information and marginal returns. This contribution is *methodological*, developing techniques to categorize customers according to their propensity to abandon, allowing more effective retention strategies. By adjusting interventions according to the predicted behavior, this methodology handles uncertainty in information, which is key in decision-making in dynamic environments.

Experimental results demonstrate the effectiveness and adaptability of both models in different contexts, highlighting their relevance in business decision-making. Finally, future extensions such as parallelized algorithms and empirical validation are proposed. In summary, this thesis contributes to developing methodologies for product management and customer retention, offering tools applicable in the business field to improve decision-making and optimize utility.

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin el aporte de muchas personas a las cuales mediante estas líneas deseo expresar mi infinito agradecimiento.

A la Universidad de los Andes, por las becas que me entregaron para financiar mis estudios de doctorado.

A mi tutor Dr. Ing. Juan Pérez Retamales, por su dedicación en las revisiones de este trabajo, por ser mi guía y por su motivación a cumplir mi meta.

A la Dra. Carmen Pérez por ser mi tutora metodológica, por su constancia, por su infinita Fe y bondad y alentarme a nunca rendirse porque Todo lo puedo en Cristo que me fortalece.

A todos los investigadores que colaboraron en este trabajo, especialmente a Dr. Ing. Héctor López-Ospina, a Dr. Ing. Sebastián Maldonado y a Ing. Paolo Latorre.

A todos mis profesores y compañeros de clases que de alguna forma contribuyeron conmigo en el logro de esta meta.

Además, esta tesis fue parcialmente financiada por el Proyecto ANID Fondecyt-Regular número: 1220822, Proyecto ANID Fondecyt-Iniciación número: 11241278, Beca doctoral ANID número: 21231175, Beca doctoral ANID número: 21220491 y el Proyecto STIC-AMSUD código: 22-STIC-09.

Índice general

Dedicatoria	II
Resumen	III
Abstract	IV
Agradecimientos	V
1. Introducción	1
1.0.1. Foco original de la investigación	2
1.0.2. Forma que tomó finalmente la investigación	3
1.1. Inteligencia computacional como marco unificador	4
1.2. Hipótesis	4
1.3. Objetivos	8
1.3.1. Objetivos Generales	8
1.3.2. Objetivos Específicos para el Primer Trabajo	8
1.3.3. Objetivos Específicos para el Segundo Trabajo	9
1.4. Contexto de la Investigación	9
1.5. Estructura del informe	11
2. Revisión Bibliográfica	14
2.1. Integración de modelos de elección discreta con estrategias de inventario y fijación de precios	15
2.1.1. Pricing	16
2.1.2. Lot-sizing	17
2.1.3. Demanda estocástica	18
2.1.4. Modelo Logit multinomial restringido	19
2.1.5. Método de punto fijo	21
2.1.6. Optimización por enjambre de partículas	22
2.2. Diseño de campañas de retención de clientes	25
2.2.1. Predicción del churn	27
2.2.2. Enfoque analítico prescriptivo	34

2.2.3.	Optimización de profit para la retención de clientes	35
2.3.	Inteligencia computacional y sus aplicaciones	38
2.3.1.	Aplicaciones de la IC	39
2.3.2.	Análisis comparativo de modelos previos y modelos propuestos .	39
2.3.3.	Valor Original de la Investigación	41
3.	Metodología	42
3.1.	Integración de modelos de elección discreta con estrategias de inventario y fijación de precios	44
3.1.1.	Enfoque matemático	44
3.2.	Diseño de campañas de retención de clientes	53
3.2.1.	El enfoque de la predicción	53
3.2.2.	Un enfoque basado en los beneficios (profit-driven) para la cap- tación de clientes	57
3.2.3.	El modelo de análisis prescriptivo	61
4.	Resultados y Análisis	64
4.1.	Integración de modelos de elección discreta con estrategias de inventario y fijación de precios	65
4.1.1.	Escenario base	66
4.1.2.	Escenario 1: Análisis de la sustitución limitando los productos más atractivos mediante ajustes de costos y capacidades	71
4.1.3.	Escenario 2: Limitación de un producto más atractivo mediante parámetros CMNL	79
4.2.	Diseño de campañas de retención de clientes	84
4.3.	Relevancia de los resultados	97
5.	Conclusiones	98
5.1.	Conclusiones teóricas y prácticas	98
5.2.	Investigación futura	100
5.3.	Relevancia científica y aplicada	103
	Glosario	104
	Referencias	107
	Anexos	129

A. Implementación metodología PSO al modelo matemático	129
A.1. Pasos para la implementación del algoritmo PSO	129
A.2. Análisis de la Resiliencia del Modelo	133
A.2.1. Escenario 0: Caso base o referencial	135
A.2.2. Escenario 1: Limitación en producto más atractivo mediante cos- tos y capacidades	135
A.2.3. Escenario 2: Limitación en producto más atractivo a través de parámetros CMNL	137
B. Conjunto de reglas para el FIS tipo Mamdani	140
B.1. Datos <i>relevantes</i> del “ <i>D</i> ” a través de Mamdani FIS	140
B.2. Resultados extendidos para el caso base	142
B.2.1. Matriz de Confusión y sus métricas	142
B.2.2. Sensibilización Reglas Mamdani	144
C. Optimización de mapas de control estratégico	156
C.1. Revisión bibliográfica	156
C.1.1. Método DEMATEL	158
C.1.2. Optimización multicriterio	165
C.2. Metodología: Optimización de mapas de control estratégico	168
C.2.1. Enfoque matemático	172
C.3. Resultados y análisis:	179
C.3.1. Modelo Multicriterio	180
C.3.2. Cálculo del Óptimo para Cada Iteración	181
D. Configuraciones Experimentales	191
D.1. Aplicación metodología <i>DEMATEL</i>	191
D.2. Escenarios	193
D.2.1. Caso base	193
D.2.2. Caso general	195
D.2.3. Limitación presupuestaria	197

Índice de figuras

2.1. Representación de la iteración y posicionamiento de partículas en PSO.	24
2.2. Descripción del sistema difuso.	31
3.1. Descripción del método PSO modificado propuesto.	50
3.2. Explicación de la Optimización interna de PSO.	51
4.1. Mejor convergencia para la prueba 1 del escenario base.	68
4.2. Mejor convergencia para la prueba 2 del escenario base.	69
4.3. Mejor convergencia para la prueba 3 del escenario base.	69
4.4. Reglas FIS del caso base para dos valores de γ	87
4.5. Diagrama explicativo de la metodología numérica para maximizar el beneficio de una campaña.	89
4.6. Diagrama del modelo de Inferencia Difusa para Optimización de Retención de Clientes.	90
4.7. Reglas FIS del caso Base para tres valores de K	93
4.8. Reglas FIS mejoradas para tres valores de K	94
4.9. Evaluación comparativa del beneficio teórico frente al beneficio real en campañas de retención	95
A.1. Mejor convergencia - Escenario 1 ($ML \uparrow C_{Prod}$).	136
A.2. Mejor convergencia - Escenario 1 ($ML \downarrow m_{Cap}$).	136
A.3. Mejor convergencia - Escenario 1 ($MBI \uparrow C_{Prod}$).	137
A.4. Mejor convergencia - Escenario 1 ($MBI \downarrow m_{Cap}$).	137
A.5. Mejor convergencia - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado.	138
A.6. Mejor convergencia - Escenario 2 ($E_{V0=2}$).	138
A.7. Mejor convergencia - Escenario 2 ($E_{V0=1}$).	139
B.1. Matriz de Confusión.	143
B.2. Reglas FIS V4_2 para tres valores de K	146
B.3. Reglas FIS V4_3 para tres valores de K	147

B.4. Reglas FIS V4_4 para tres valores de K	148
B.5. Reglas FIS V4_5 para tres valores de K	149
B.6. Reglas FIS V4_6 para tres valores de K	150
B.7. Reglas FIS V4_7 para tres valores de K	151
B.8. Reglas FIS V4_8 para tres valores de K	152
B.9. Reglas FIS V4_9 para tres valores de K	153
B.10.Reglas FIS V4_3LR para tres valores de K	155
C.1. Matriz de Relaciones Totales.	179
C.2. Análisis de Causalidad.	179
C.3. Mapa Estratégico - Caso Base.	182
C.4. Mapa Estratégico 1.	183
C.5. Mapa Estratégico 2.	183
C.6. Mapa Estratégico 3.	184
C.7. Mapa Estratégico 4.	184
C.8. Función objetivo Z_1	185
C.9. Función objetivo Z_2	185
C.10.Función objetivo Z_3	185
C.11.Importancia relativa w_2	186
C.12.Importancia relativa w_3	186
C.13.Función objetivo Z	186
C.14.Función objetivo $\bar{Z}$	186
C.15.Funciones objetivo Z_i normalizadas.	187
C.16.Mapa Estratégico p=50.	187
C.17.Mapa Estratégico p=40.	187
C.18.Mapa Estratégico p=30.	188
C.19.Mapa Estratégico p=20.	188
C.20.Mapa Estratégico p=10.	188
D.1. Mapa estratégico - Caso Base	194

Índice de cuadros

2.1. Tabla de componentes, formulación canónica y descripción	18
2.2. Problemas no resueltos por los modelos existentes en la primera contribución	40
2.3. Comparación con trabajos específicos en la primera contribución	40
2.4. Problemas no resueltos por los modelos existentes en la segunda contribución	40
2.5. Comparación con trabajos específicos en la segunda contribución	41
4.1. Parámetros de la hipótesis de base.	67
4.2. Parámetros CMNL para el escenario de referencia.	67
4.3. Función objetivo de utilidad – Escenario base	67
4.4. Función objetivo - beneficio de la empresa y desviaciones de la media para tres pruebas.	68
4.5. Valor de la función objetivo para tres pruebas y cada período: cuanto más se acerque a cero, menor será el error.	68
4.6. Variables de decisión y demandas para la prueba 1 en escenario base. .	70
4.7. Variables de decisión y demandas para la prueba 2 en escenario base. .	70
4.9. Comparación almacenamiento calculado (S_{it}) vs almacenamiento real (S_{it}^{real}) - Escenario base.	70
4.8. Variables de decisión y demandas para la prueba 3 en escenario base. .	71
4.10. Diferencia almacenamiento calculado vs real ($ S_{it}^{real} - S_{it} $) - Escenario base.	71
4.11. Valores de Atractivo (I_{it}) para cada periodo y producto.	72
4.12. Capacidad de producción limitada—Escenario 1.	73
4.13. Costos de producción para el Escenario 1.	73
4.14. Función objetivo de utilidad - Escenario 1: Mercado de alta sensibilidad al precio.	73

4.15. Función de punto fijo de almacenamiento - Escenario 1: Mercado de alta sensibilidad a los precios.	74
4.16. variables y cálculos de la demanda para $ML \uparrow C_{Prod}$ - Escenario 1. . . .	74
4.17. Variables y cálculo de demandas para $ML \downarrow m_{Cap}$ - Escenario 1.	75
4.18. Comparación almacenamiento calculado vs almacenamiento real - Escenario 1: Mercado de alta sensibilidad de precios.	76
4.19. Diferencia entre almacenamiento calculado y real – Escenario 1: Mercado de alta sensibilidad de precios.	76
4.20. Función objetivo de utilidad-Escenario 1: Mercado de baja sensibilidad al precio.	77
4.21. Función de punto fijo de almacenamiento – Escenario 1: Mercado de baja sensibilidad a los precios.	77
4.22. Variables y cálculos de demandas - Escenario 1 ($MBI \uparrow C_{Prod}$).	78
4.23. Variables y cálculos de demandas – Escenario 1 ($MBI \downarrow m_{Cap}$).	79
4.24. Comparación almacenamiento calculado vs real - Escenario 1: Mercado de baja sensibilidad de precios.	79
4.25. Diferencia entre almacenamiento calculado vs real – Escenario 1: Mercado de baja sensibilidad de precios.	80
4.26. Parámetros CMNL-Escenario No.2 alto: M_t	80
4.27. Función objetivo de utilidad — Escenario 2: Aumento del tamaño del mercado.	81
4.28. Valores para diferentes periodos de función de punto fijo de almacenamiento - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado	81
4.29. Variables y cálculos de la demanda - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado.	82
4.30. Comparación almacenamiento calculado vs real - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado.	82
4.31. Diferencia almacenamiento calculado vs real - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado.	82
4.32. Parámetros CMNL - Escenario No.2: bajo V_0	83
4.33. Función objetivo de utilidad - Escenario 2: Variación de utilidad de no-compra.	83
4.34. Función de punto fijo de almacenamiento - Escenario 2: Variación de utilidad de no-compra.	83
4.35. Variables y cálculos de demandas para el escenario 2 ($E_{V_0=2}$).	84

4.36. Variables y cálculos de demandas - Escenario 2: Disminución de la utilidad no-compra ($E_{V_0=1}$).	85
4.37. Comparación almacenamiento calculado vs real - Escenario 2: Variación de utilidad de no-compra.	85
4.38. Diferencia almacenamiento calculado vs real – Escenario 2: Variación en utilidad de no-compra.	85
4.39. Resultados de Combinaciones de Reglas FIS	86
A.1. Número de iteraciones y partículas—PSO MAIN y PSO SUB	130
A.2. Factores de Aprendizaje—PSO MAIN y PSO SUB	131
A.3. Inicialización de Variables—PSO MAIN	131
A.4. Inicialización de Variables de Almacenamiento (S_{it})—PSO SUB	131
A.5. Peso de Inercia—PSO	132
A.6. Parámetros CMNL asociados a limitaciones de almacenamiento y producción	132
A.7. Tiempos de ejecución del algoritmo para diferentes escenarios y pruebas.	134
B.1. Reglas con los valores de V, F, L y D (Churner, No-Churner).	141
B.2. Casos Churner y No-Churner con énfasis en mejora	145
C.1. Relación entre término y valor lingüístico	160
C.2. Pasos para la técnica aplicada: DEMATEL difuso.	164
C.3. Comparación de metodologías en mapas estratégicos	169
C.4. Variables del Caso Base	182
C.5. Proyectos - Caso Base	182
C.6. Valores de Funciones Objetivo - Caso Base	183
C.7. Resultados f.o Caso General	184
C.8. Resultados f.o normalizadas	184
C.9. Resultados variable S_k	189
C.10. Resultados Variable Y_i	190
D.1. Lista de Objetivos Estratégicos	191
D.2. Grado de relación y su convención	192
D.3. Matriz de Calificación DEMATEL	193
D.4. Parámetros Caso base	194
D.5. Parámetros Metodología DEMATEL - Caso Base	195
D.6. Parámetros Caso general	196
D.7. Parámetros Metodología DEMATEL - Caso General	196

D.8. Variación de Ponderadores – Caso General	197
---	-----

Capítulo 1

Introducción

En el entorno empresarial actual, usualmente con altos niveles de competencia y en mercados en constante evolución, las organizaciones enfrentan el desafío de optimizar sus operaciones para sostener su rentabilidad y viabilidad. Uno de los problemas más críticos que se presentan es la gestión eficiente del stock, la producción y la fijación de precios de productos sustitutos. La incapacidad para abordar estos aspectos puede resultar en pérdidas significativas y en la disminución de la satisfacción del cliente, lo que a su vez puede afectar la lealtad y la retención de los mismos.

En este contexto, la toma de decisiones óptimas es un desafío clave para maximizar la **rentabilidad**. La complejidad de este problema se agrava debido a la *incertidumbre* en la demanda, las restricciones operativas y el comportamiento cambiante de los consumidores. Resolver estos problemas requiere herramientas flexibles y robustas que permitan modelar incertidumbre, optimizar recursos y ofrecer soluciones aplicables en entornos reales.

Este trabajo aborda la integración de modelos de elección discreta con estrategias de gestión empresarial, enfocándose en la optimización simultánea de inventarios y precios y campañas de retención de clientes en mercados dinámicos. La investigación combina metodologías clásicas de investigación operativa con enfoques modernos como la inteligencia computacional que engloba las dos contribuciones, permitiendo manejar incertidumbre y complejidad del entorno competitivo. Los modelos propuestos buscan maximizar la eficiencia operativa y estratégica, ofreciendo soluciones aplicables en diversos escenarios y contribuyendo a la toma de decisiones.

1.0.1. Foco original de la investigación

Inicialmente esta investigación se centraba en el estudio del *Balanced Scorecard (BSC)* y *Decision-Making*. En el proceso de investigación no se encontraron mayores dificultades en explorar *BSC*, existe avance del análisis, se lograron algunos resultados, y el campo es de interés. Sin embargo, los resultados, si bien son positivos, no se consideraron lo suficientemente interesantes o de impacto suficientes, como para producir una publicación en el corto plazo, y se requiere un mayor tiempo para una evaluación aún más profunda. En el estudio del BSC, se contempla el desarrollo de un modelo de optimización del diseño de mapas de control estratégico, que en términos de contribución al estado del arte, se tiene proyectado en la extensión del modelo de Acuña-Carvajal et al. (2019), la inclusión de análisis de proyectos dentro del diseño del mapa de control estratégico, como también la maximización de los niveles de cumplimiento de los objetivos estratégicos, lo que se estudiará con técnicas de optimización multicriterio.

Lo anterior sirve para ofrecer a los tomadores de decisiones múltiples arquitecturas optimizadas de mapas de control estratégico, los cuales consideran objetivos de las empresas que se pueden priorizar a través de un esquema de optimización. Este modelo será abordado con la metodología DEMATEL¹ difuso Jassbi et al. (2011), Wu (2012). El marco de estudio del *BSC* aplicado a proyectos se ubicó en una fase de investigación en desarrollo que se puede ver en los apéndices C y D, sin constituir el enfoque principal. En consecuencia, los hallazgos obtenidos llevaron a la decisión de priorizar el estudio en el área de *Decision-Making*, reconociendo que este enfoque podría ofrecer un impacto más inmediato y significativo en la práctica empresarial. Este enfoque sirvió como base para la elaboración del primer artículo publicado y, posteriormente, del segundo enviado para su publicación.

¹DEMATEL: Decision making trial and Evaluation Laboratory. Es un método útil para analizar las relaciones de causa y efecto entre los componentes de un sistema. Permite confirmar la interdependencia entre factores y ayudar a elaborar un mapa que refleje las relaciones relativas entre ellos, y puede utilizarse para investigar y resolver problemas complicados y entrelazados. Este método no solo convierte las relaciones de interdependencia en un grupo de causa y efecto mediante matrices, sino que también encuentra los factores críticos de un sistema de estructura compleja con la ayuda de un diagrama de relaciones de impacto.

1.0.2. Forma que tomó finalmente la investigación

Es por esto que el principal foco de estudio corresponde al desarrollo de modelos y metodologías para generar soluciones efectivas y económicamente viables que puedan respaldar las decisiones empresariales en entornos caracterizados por la presencia de múltiples criterios y limitada disponibilidad de información. Específicamente brindando herramientas para el apoyo a la toma de decisiones tendientes a:

- a) Desarrollar modelos para la gestión de productos sustitutos, optimizando decisiones críticas en almacenamiento, producción y fijación de precios (objetivo estratégico primordial para las organizaciones) bajo restricciones dinámicas. Esta metodología, al incorporar análisis multi-producto, ajusta parámetros clave que afectan la curva de utilidad del consumidor, permitiendo una evaluación precisa del impacto de diferentes factores en las decisiones de compra. La capacidad de adaptar estos modelos a contextos cambiantes y demandas del mercado refuerza la toma de decisiones informadas y económicamente viables.
- b) Ayudar a las empresas en el diseño de campañas para lograr una mayor fidelización y satisfacción del cliente. La capacidad de **maximizar las utilidades** a lo largo del tiempo no solo influye en la **rentabilidad**, sino que también afecta la posición competitiva y la sostenibilidad a largo plazo de las empresas. En este contexto, se propone el desarrollo de un modelo de inferencia difusa de tipo Mamdani, que permite evaluar la propensión al abandono de los clientes (churn). Este modelo considera múltiples variables que influyen en el comportamiento del consumidor, facilitando la identificación de clientes en riesgo y la implementación de estrategias de retención más efectivas.

La investigación aporta al estado del arte sobre la gestión de productos sustitutos y retención de clientes que confluyen en la maximización de rentabilidad como guía para la toma de decisiones, integrando enfoques teóricos y prácticos que abordan problemáticas no tratadas anteriormente en la literatura y se espera que los resultados de ésta proporcionen información relevante y contribuyan a la industria, permitiendo abordar la estrategia empresarial desde una nueva perspectiva. Al mejorar la gestión y ofrecer ventajas competitivas, este estudio se configura como una herramienta de apoyo para

los tomadores de decisiones, ayudando a las organizaciones a navegar en un entorno complejo y a maximizar su rendimiento.

1.1. Inteligencia computacional como marco unificador

La *inteligencia computacional (IC)* surge como un enfoque adecuado para resolver problemas complejos de optimización y toma de decisiones. La IC integra metodologías como:

- **Computación evolutiva:** Técnicas como la Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), utilizadas para la exploración global de soluciones óptimas.
- **Lógica difusa:** Herramientas como los Sistemas de Inferencia Difusa (FIS) tipo Mamdani, capaces de modelar incertidumbre inherente en procesos de decisión.

Ambas técnicas, aunque conocidas, ofrecen un marco metodológico novedoso cuando se aplican a problemas específicos, como la optimización de operaciones y estrategias de retención de clientes.

1.2. Hipótesis

Cuatro hipótesis fueron consideradas en el desarrollo de esta investigación. Las hipótesis formuladas para la tesis abordan aspectos críticos en la gestión de productos sustitutos, el diseño de campañas de retención y la optimización empresarial. A continuación, se presenta un análisis detallado de cada una de ellas:

- I. En mercados caracterizados por restricciones explícitas de capacidad que son observadas por los clientes, alta variabilidad en la demanda y sensibilidad al precio; la implementación de un modelo de optimización que integra la demanda basada en las preferencias de los consumidores supera en rentabilidad y precisión a los modelos tradicionales de elección discreta, los cuales consideran únicamente la demanda probabilística sin restricciones.

Esta premisa fue validada mediante simulaciones en escenarios de mercado realistas. Al comparar el modelo con un escenario de referencia de condiciones simétricas y sin diferenciación de productos, se demostró su capacidad para adaptarse a fluctuaciones en la demanda. Tres pruebas realizadas mostraron un rendimiento satisfactorio, destacando su eficacia en la toma de decisiones sobre inventario y precios para productos sustitutos con restricciones suaves de suministro. Este enfoque mejora la representación del mercado y permite capturar el impacto de las restricciones de capacidad en el comportamiento del consumidor, lo que se traduce en una mayor precisión y efectividad en la toma de decisiones empresariales en contextos de alta sensibilidad a la disponibilidad de recursos. Posteriores simulaciones analizaron escenarios donde se limitan productos atractivos ajustando costos y capacidades, y se realizó un análisis adicional en un mercado con baja sensibilidad a los precios.

- II. La integración de decisiones de almacenamiento, producción, fijación de precios y modelación de preferencias de los consumidores en un contexto de múltiples productos sustitutos, permite un mejor manejo del inventario, reduce los costos operativos y aumenta la satisfacción del cliente comparado con enfoques tradicionales de manejo de inventarios. Este enfoque se fundamenta en la posibilidad de ofrecer productos sustitutos como alternativa en casos de quiebres de stock, lo que optimiza la disponibilidad percibida por los clientes y mejora su experiencia de compra.

Esta hipótesis sugiere que la integración de decisiones operativas como almacenamiento, producción y precios en un marco analítico multi-producto reduce costos y aumenta la satisfacción del cliente. Se validó al implementar el modelo en un entorno simulado que replicaba condiciones de mercado reales. La integración demostró mejorar significativamente la eficiencia operativa, reduciendo costos de almacenaje de productos, y optimizando la satisfacción del cliente mediante precios ajustados a la disponibilidad y preferencia de los productos. Destaca cómo la experiencia del cliente mejora al percibir disponibilidad, incluso cuando el producto buscado no está en stock. Las pruebas realizadas confirmaron una mejora en la satisfacción del cliente y una disminución en los costos operativos.

En industrias como el sector alimentario, de bebidas o productos de consumo masivo, las empresas enfrentan restricciones de capacidad y fluctuaciones en las preferencias de los

clientes, lo que las obliga a adaptarse constantemente a la disponibilidad de productos y a las condiciones del mercado.

El manejo tradicional de inventarios, que segmenta los productos según las preferencias primarias de los clientes, ignora las dinámicas de sustitución, limitando su capacidad para optimizar costos y mantener la satisfacción del cliente. Por ejemplo, en una empresa que comercializa bebidas, los clientes pueden tener preferencia inicial por un refresco sabor naranja, pero podrían optar por un refresco sabor limón cuando el primero no está disponible. Incorporar este comportamiento de sustitución en la gestión de inventarios permite a las empresas ofrecer alternativas viables en situaciones de quiebre de stock, logrando un manejo más eficiente de los recursos. Esto se traduce en beneficios como:

- Disminución de costos: Si los refrescos de naranja tienen un costo elevado debido a limitaciones de suministro, priorizar la sustitución con refrescos de limón, disponibles a menor costo, permite mantener el balance operativo sin sacrificar tan fuertemente la experiencia del cliente.
- Reducción de quiebres de stock: Al integrar la sustitución, las empresas evitan pérdidas de ventas al garantizar que los clientes encuentren una alternativa aceptable, incluso si su preferencia inicial no está disponible, asegurando una experiencia positiva para el cliente.

Este enfoque no solo mejora la eficiencia en la gestión del inventario, sino que también responde de manera proactiva a las restricciones del mercado y las preferencias dinámicas de los consumidores, fortaleciendo la capacidad de las empresas para competir en mercados altamente sensibles a la disponibilidad y los costos.

III. Las campañas tradicionales de retención de clientes centradas exclusivamente en la selección de público objetivo (*o targeting*), pueden ser mejoradas mediante el diseño óptimo y dinámico de incentivos. Autores previos sólo se enfocaban en el targeting, y hacer este manejo en conjunto con el diseño de incentivos, no sólo es novedoso, sino que también mejora las prospecciones de utilidad de las empresas.

A través de simulaciones, se confirmó que las estrategias basadas en lógica difusa para la segmentación de clientes, permiten una asignación (*targeting*) más eficiente de recursos en campañas de retención. Los resultados mostraron que las campañas optimizadas

lograron tasas de retención superiores, mayor satisfacción del cliente y una utilidad más alta.

A diferencia de estudios previos, como los de Neslin, que tratan el incentivo (δ) como una constante, esta investigación lo aborda como una variable de decisión optimizable. Este enfoque no solo es novedoso, sino que también maximiza las utilidades empresariales, integrando (*el targeting* con el majo conjunto e innovador de los incentivos).

IV. En un modelo de prevención de fuga de clientes que integra *targeting* y diseño óptimo de incentivos, se puede mejorar la precisión en las decisiones estratégicas y, por ende, la utilidad de la empresa, cuando se categoriza a los clientes. Este enfoque no solo permite a las organizaciones implementar estrategias de retención más efectivas, sino que también reduce la tasa de abandono de clientes.

La validación se realizó a través de un análisis de datos de clientes, donde se segmentaron clientes con base en su valor de compra, frecuencia y fidelidad. Esta segmentación permitió diseñar campañas de retención personalizadas que resultaron en una reducción significativa en la tasa de abandono, mostrando la eficacia del modelo en mejorar la retención y fidelidad del cliente en mercados competitivos.

Se destaca el carácter innovador de combinar *targeting*, diseño dinámico de incentivos y análisis de datos, introduciendo un esquema novedoso de segmentación de clientes, algo no explorado en investigaciones previas. Asimismo, integra cómo este enfoque mejora las estrategias de retención al vincular directamente la segmentación con la optimización de utilidades y reducción de abandono.

Estas hipótesis se evaluaron a través de simulaciones y análisis de datos para la toma de decisiones estratégicas, permitiendo validar las afirmaciones planteadas en la tesis y contribuir al cuerpo de conocimiento en el campo de la investigación de operaciones y la gestión empresarial. Asimismo, se demuestra la alineación de las hipótesis con las tendencias actuales en la gestión de relaciones con clientes.

La integración de análisis cuantitativos y cualitativos, junto con una interpretación de los resultados más la combinación de técnicas de lógica difusa y un enfoque analítico en la categorización de clientes no solo refuerza la validez de estas hipótesis, sino que también proporciona un marco teórico y práctico que puede ser aplicado en diversas industrias, y ofrecer recomendaciones valiosas como herramientas prácticas para que las

empresas optimicen su gestión en un contexto de creciente complejidad y competencia. La evidencia que respalda estas hipótesis será fundamental para consolidar su relevancia y aplicabilidad en el ámbito empresarial, contribuyendo así a la literatura existente sobre la gestión de productos sustitutos y la retención de clientes y optimización de campañas.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivos Generales

- a) Desarrollar modelos de optimización para la gestión de productos sustitutos que permitan integrar decisiones de almacenamiento, producción y fijación de precios bajo condiciones de demanda probabilística que incluya las preferencias de los clientes y restricciones dinámicas (variables en el tiempo).
- b) Diseñar y validar metodologías que incluyan conjuntamente *el targeting* y el diseño de incentivos para clientes, basadas en lógica difusa para optimizar la utilidad asociada con campañas de retención de clientes, con el fin de mejorar su efectividad en mercados con altas tasas de abandono.

1.3.2. Objetivos Específicos para el Primer Trabajo

- Diseñar un modelo que integre decisiones de almacenamiento, producción y fijación de precios para productos sustitutos, adaptándose a condiciones de demanda no fija y probabilística (Optimización de la gestión de productos sustitutos, en un contexto de un modelo de *lot-sizing*).
- Investigar cómo las variaciones en precios y características de los productos afectan la demanda de productos sustitutos, utilizando modelos de elección discreta para representar esta relación (Análisis de la sensibilidad de la demanda).
- Diseñar un algoritmo que integre dos metaheurísticas de optimización por enjambre (PSO) para resolver la complejidad no lineal del modelo, donde una busca la optimización global y la otra mantiene el equilibrio intertemporal en las decisiones de almacenamiento y demanda (Desarrollo de un algoritmo de optimización híbrido de PSO).

1.3.3. Objetivos Específicos para el Segundo Trabajo

- Desarrollar un sistema de categorización de clientes utilizando lógica difusa (Mamdani FIS) para identificar aquellos con mayor propensión a abandonar la empresa, facilitando la creación de campañas de retención más efectivas (Implementación de técnicas de lógica difusa).
- Diseñar y optimizar campañas de retención de clientes basadas en el análisis de datos, maximizando la utilidad de las intervenciones dirigidas a diferentes segmentos de clientes (Evaluación de estrategias de retención de clientes).

Estos objetivos reflejan un enfoque integrado que busca no solo optimizar la gestión de productos en un contexto competitivo, sino también mejorar la relación con los clientes a través de estrategias de retención basadas en análisis de datos y técnicas de optimización.

Esta investigación propone metodologías novedosas que, mediante simulaciones numéricas, muestran su potencial para mejorar la gestión de inventarios, precios y campañas de retención en contextos de incertidumbre. Los resultados tienen sus alcances en entornos simulados y establecen una base para futuras validaciones empíricas en escenarios reales. Una validación empírica, aplicada en empresas específicas, podría reforzar aún más la aplicabilidad de los modelos propuestos, permitiendo ajustar parámetros en función de datos reales y explorar su efectividad en diferentes industrias. Al momento del desarrollo de este informe ya se está trabajando en el desarrollo de encuestas que permitan emular de mejor manera las preferencias y decisiones de los clientes, como también levantando información real de costos de empresas.

1.4. Contexto de la Investigación

La investigación contribuye al desarrollo de modelos que apoyan la toma de decisiones en entornos con información limitada. En el ámbito de la gestión empresarial, la optimización simultánea de inventarios, precios y almacenamiento en mercados con productos sustitutos, así como el diseño de estrategias efectivas de retención de clientes, han sido desafíos persistentes. Aunque por una parte, se han desarrollado modelos clásicos que

consideran demandas deterministas, estos enfoques no capturan la complejidad de mercados dinámicos con restricciones de capacidad y preferencias cambiantes de los clientes. Por otra parte, los enfoques tradicionales para la predicción de abandono y la segmentación de clientes solo aplican lógica difusa a problemas específicos. Esta investigación aborda estas brechas al proponer dos contribuciones clave que, aunque aplicadas en dominios distintos, comparten un *objetivo común*: **"Maximizar la rentabilidad como criterio central en la toma de decisiones empresariales"**. Las contribuciones son: (1) un modelo de optimización integrado que combina decisiones de almacenamiento, producción y fijación de precios en un entorno de demanda probabilística. Además, el enfoque híbrido desarrollado utiliza técnicas de optimización por enjambre de partículas (PSO) y un método de punto fijo, lo que representa una importante innovación metodológica. En resumen, la primera contribución optimiza decisiones de inventario, producción y precios en un contexto probabilístico con restricciones de capacidad, y (2) un enfoque profit-driven para diseñar campañas de retención de clientes basado en sistemas de inferencia difusa y segmentación. En ésta se realiza la asignación eficiente de recursos a las estrategias de retención a través de técnicas de lógica difusa en el proceso predictivo para categorizar clientes según su propensión al abandono en conjunto con la implementación de un modelo de optimización basado en la maximización de beneficios, abordando limitaciones de los modelos existentes y proponiendo soluciones replicables en otros contextos. En resumen, la segunda contribución optimiza estrategias de retención de clientes, introduciendo una relación dinámica entre incentivos y tasas de aceptación. Ambas contribuciones se enmarcan en el paradigma de la *analítica prescriptiva*, que busca recomendar acciones óptimas basadas en un análisis cuantitativo riguroso y además, que no solo aportan soluciones a problemas específicos y a mejorar la precisión en la toma de decisiones empresariales, sino que también avanzan el estado del arte en sus respectivos campos, al generar una base teórica y nuevas perspectivas metodológicas para futuras investigaciones en optimización empresarial, específicamente, en áreas como la resiliencia empresarial o la planificación sostenible. En particular, la replicabilidad y adaptabilidad de los modelos en entornos de incertidumbre y restricciones complejas, los posiciona como una herramienta de apoyo para los tomadores de decisión en industrias que enfrentan condiciones de mercado dinámicas.

El contexto abarca empresas que enfrentan restricciones de capacidad y cambios en las

preferencias de los clientes, lo que les obliga a adaptarse a la disponibilidad de productos y a las condiciones del mercado. Estos modelos propuestos se aplican particularmente en industrias donde los productos son sustitutos, como el sector alimentario, de bebidas, o productos de consumo masivo, donde la competencia y la escasez son factores críticos. Como parte de esta investigación, dos trabajos fueron terminados en su totalidad, donde un primer trabajo fue publicado en una revista científica de corriente principal, un segundo trabajo está siendo enviado a una revista científica de alto impacto y un tercer trabajo está en proceso de desarrollo.

- Meza, A., Latorre, P., Bonacic, M., López-Ospina, H., Pérez, J., Optimizing Inventory and Pricing for Substitute Products with Soft Supply Constraints. *Mathematics* 2024, 12, 1751.
- Meza, A., Latorre, P., López-Ospina, H., Pérez, J., A prescriptive analytics approach to design profit-driven retention campaigns. *Expert Systems with Applications*.

Además, parte de esta investigación fue presentada en varias conferencias internacionales como: en la versión N°33 de la Conferencia Europea en Investigación de Operaciones (Euro2024) en Copenhague, Dinamarca. También se presentó en la versión N°8 del Simposio Internacional en Optimización Combinatoria (ISCO2024) en Santa Cruz de Tenerife, España, en la Conferencia Internacional para académicos y profesionales de Investigación y análisis de operaciones INFORMS ALIO-ASOCIO 2024 en Medellín, Colombia, en la versión N°23 de la Conferencia de la Federación Internacional de Sociedades de Investigación de Operaciones (IFORS2023) en Santiago de Chile, en la versión N°21 del Congreso Internacional Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa (CLAIO2022) en Buenos Aires, Argentina y en la versión N°14 del (OPTIMA2021) de la Conferencia bianual del Instituto Chileno de Investigación Operativa (ICHIO) en Talca, Chile, lo que resalta la relevancia y aplicabilidad de los modelos propuestos en el estudio en el campo de la investigación de operaciones y la gestión empresarial.

1.5. Estructura del informe

A continuación, se detalla la estructura del presente informe:

- a) Capítulo 1: Introducción. Este capítulo contextualiza el problema de investigación, destacando su relevancia académica y aplicada. Además, se formulan las hipótesis que orientan el estudio, asegurando un enfoque estructurado hacia los objetivos planteados. Se definen los objetivos generales y específicos de la investigación, y por último, se presenta una visión general de la estructura del informe, facilitando la comprensión integral del desarrollo y alcance del trabajo.
- b) Capítulo 2: Revisión bibliográfica general y específica para esta investigación. Aquí se presenta un análisis de la literatura, en el que se detallan conceptos y temas clave necesarios para una mayor comprensión de los modelos previos y enfoques abordados en la investigación, estructurados así: 1.) Optimización de inventarios y precios: Se analizan enfoques existentes en producción, gestión de inventarios y fijación de precios de productos sustitutos, destacando las limitaciones de modelos tradicionales, que suelen asumir escenarios estáticos y deterministas. Además, se revisan avances en modelos de elección discreta multinomial basados en logit, destacando su integración con estrategias dinámicas que responden a mercados competitivos y sensibles al tiempo. 2.) Diseño de campañas de retención de clientes: Se incorpora la lógica difusa, en particular mediante el método Mamdani, para categorizar clientes en función de su propensión al abandono (*churn*). Esta permite mejorar la precisión de las estrategias de fidelización y optimizar el uso de recursos de la empresa. La investigación combina técnicas de categorización con modelos clásicos de campañas de retención, logrando soluciones novedosas y económicamente viables. Por último, la investigación resalta la importancia de la inteligencia computacional como concepto que engloba computación evolutiva (*PSO*, primer trabajo) y lógica difusa (*Mamdani FIS*, segundo trabajo), para fortalecer la coherencia y aplicabilidad de las dos contribuciones.
- c) Capítulo 3: Metodología propuesta para esta investigación. Aquí se presentan dos propuestas de modelos que brindan herramientas para el apoyo a la toma de decisiones: En primer lugar, nos centraremos en un modelo de optimización de beneficios para productos sustitutos en un mercado competitivo, que es sensible al tiempo y enfrenta condiciones de escasez y preferencias cambiantes de los consumidores. Se considera la influencia de los costos de producción y el manteni-

miento de inventarios, utilizando un modelo de elección discreta para capturar la demanda y la sensibilidad al precio. En segundo lugar, el modelo permite ayudar a las empresas en el diseño de campañas para la retención de clientes a través de la unión de dos etapas metodológicas enlazadas: la primera es la elaboración de un método de inferencia difusa inspirado en el modelo de Mamdani para evaluar la probabilidad de abandono de clientes, conocidos como '*churners*'. Este enfoque implica el análisis de tres factores de entrada clave: el valor de compra (V), la frecuencia de compra (F) y la lealtad (L) de cada cliente, con el objetivo de calcular un índice numérico (D) que caracterice a cada cliente. Este índice facilitará la clasificación de clientes según su propensión de dejar la empresa e irse a la competencia. De esta manera, se podrá identificar de manera efectiva a aquellos clientes que requieren ser incluidos en campañas específicas destinadas a retenerlos, optimizando así los recursos y maximizando el retorno de inversión en estrategias de fidelización.

- d) Capítulo 4: Presentación y análisis de los principales resultados de esta investigación, para cada uno de los métodos presentados en la sección anterior. En este capítulo, se realiza un análisis de los resultados obtenidos, evaluando cómo estos responden a las necesidades planteadas en los distintos escenarios abordados en cada una de las contribuciones.
- e) Capítulo 5: Principales conclusiones de esta investigación, y propuestas de trabajo futuro para su continuidad. En este último capítulo, se resume lo desarrollado en la investigación, resaltando los hallazgos más relevantes, acompañado del análisis correspondiente de los resultados obtenidos. Finalmente, en cuanto a posibles extensiones de los modelos planteados, se exponen sugerencias para tener en consideración ciertos aspectos que planteen un contexto de mayor complejidad.

Capítulo 2

Revisión Bibliográfica

En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica sobre los tópicos abordados en la presente tesis. Cada tema se complementa con un análisis y revisión de estudios previos en los que han realizado investigaciones relacionadas. El primer tema que se introduce corresponde a la integración de un modelo de elección discreta con estrategias de inventario y fijación de precios, con una revisión de enfoques de optimización en mercados competitivos. El modelo integra eficazmente la fijación de precios, la producción y el almacenamiento para maximizar los beneficios de la empresa en entornos restringidos. Luego, se aborda el diseño óptimo de campañas de retención de clientes a modo de maximizar la utilidad que se podría obtener de una campaña. Finalmente, se introduce el concepto de inteligencia computacional (IC), el cual constituye el marco metodológico unificador que articula ambas contribuciones, al integrar enfoques de computación evolutiva (por ejemplo, la Optimización por Enjambre de Partículas, PSO) y lógica difusa, los cuales sustentan el núcleo metodológico de este trabajo. La incorporación explícita de IC fortalece la cohesión de la investigación, evidenciando que, pese a sus diferencias en aplicaciones específicas, las contribuciones comparten una fundamentación metodológica común y complementaria.

En los diversos trabajos de investigación que componen a esta tesis, se busca resolver una serie de problemáticas relacionadas a la toma de decisiones que no han sido tratadas con anterioridad en la literatura. Las investigaciones presentadas tienen un carácter aplicado. En particular, el primer trabajo aborda un modelo de optimización de beneficios para productos sustitutos en un mercado competitivo, sensible al tiempo, con escasos y preferencias de usuarios cambiantes. El modelo tiene en cuenta los costos de

producción y el mantenimiento de inventarios, utilizando un modelo de elección discreta para representar la demanda y la sensibilidad al precio, así como la disponibilidad de productos y preferencias cambiantes de los consumidores. La investigación ofrece un enfoque novedoso para gestionar inventarios, producción y precios en un contexto de competencia por productos sustitutos. En este marco, se consideran conceptos clave que deben ser conocidos para comprender el estudio, entre estos están: *pricing*, *lot-sizing*, demanda estocástica, modelo *logit multinomial* restringido (*CMNL*), método punto fijo y optimización por enjambre de partículas (PSO, por sus siglas en inglés).

Por otro lado, el segundo trabajo considera la utilización de una técnica de lógica difusa a través del análisis de múltiples factores¹; es decir, de la información de los clientes, para categorizarlos acorde a su propensión o tendencia a abandonar o no la empresa, y con ello definir a cuáles de ellos se debe aplicar o no la campaña diseñada. Con una contribución científica aplicada, el aporte de esta parte de la investigación radica en la combinación de una técnica novedosa de categorización de clientes respecto de la propensión a dejar la empresa (Geramian & Abraham, 2021), en conjunto con la extensión de un modelo clásico para el diseño de campañas de retención de clientes (Neslin et al., 2006), los que combinados proveen de soluciones efectivas y de bajo costo de implementación para apoyar a los responsables de la toma de decisiones.

2.1. Integración de modelos de elección discreta con estrategias de inventario y fijación de precios

La revisión de la literatura se estructura en torno a tres objetivos primordiales. Primero, destaca la importancia y diversidad de las publicaciones que abordan decisiones relacionadas con la producción, la gestión de inventarios y las estrategias de fijación de precios. En segundo lugar, explora la interacción entre los modelos de elección discreta multinomial fundamentados en la función logit y los métodos utilizados para la estimación de precios en diferentes contextos. Por último, proporciona una integración de las contribuciones del modelado matemático en el ámbito del modelo de elección discreta

¹Específicamente se hace referencia al método de Mamdani (Geramian & Abraham, 2021). Es una técnica de mapeo de relaciones de entrada a salida donde hay incertidumbre de datos, más de una entrada, una salida y una relación desconocida entre las entradas y salidas. Consta de las etapas de fuzzificación, base de reglas difusas "si-entonces", inferencia difusa y agregación y, defuzzificación

logit restringido.

2.1.1. Pricing

La fijación de precios se configura como una estrategia importante para la optimización de beneficios empresariales, dentro de la teoría económica. Esta técnica ha demostrado ser eficaz en la maximización de utilidades de las firmas, al permitir la alineación de precios con la disposición a pagar de los consumidores y la estructura de costos de producción, lo cual facilita la captura de excedentes económicos y la mejora de la rentabilidad.

A pesar de las dificultades que enfrentan las empresas para estimar el precio de reserva de los consumidores, Bitran & Ferrer (2007) consideran que diversas técnicas basadas en el análisis del comportamiento del mercado pueden facilitar esta estimación. Estas técnicas permiten el diseño de estrategias de precios que consideran la heterogeneidad en los gustos y preferencias de los consumidores. El precio se ajusta según la disposición a pagar de los consumidores y la atractividad de los productos, mientras que las empresas deben tener en cuenta las limitaciones en el control de estos parámetros y la influencia de la competencia en el mercado.

Pérez et al. (2016) proponen un modelo de maximización de utilidades que incorpora la máxima disposición a pagar de los consumidores (MWTP) para la determinación de precios. Los autores evidencian que este enfoque proporciona estimaciones de utilidades más precisas que aquellos que no integran el MWTP. Asimismo, destacan que el uso de un modelo logit multinomial (MNL) para capturar el comportamiento del consumidor es una práctica estándar en la literatura de pricing.

En esta línea, se observa que la incorporación de restricciones en la maximización de utilidades del consumidor añade complejidad al proceso de fijación de precios. Martínez et al. (2009) abordan esta complejidad utilizando un modelo logit multinomial restringido (CMNL), que permite integrar restricciones del comportamiento del consumidor mediante funciones de cut-off.

La técnica descrita ha sido efectiva en modelar la demanda en diversas industrias. Bierlaire et al. (2010) indican que, los modelos CMNL son heurísticos, aproximándose a soluciones óptimas en problemas restringidos. Asimismo, Castro et al. (2013) afirman que los modelos CMNL son óptimos para capturar el comportamiento del consumidor

en contextos específicos, dado que se ajustan mejor al modelo logit multinomial (MNL) bajo condiciones de restricción.

2.1.2. Lot-sizing

Es ampliamente investigado en la planificación de producción de bienes, porque permite optimizar la asignación de recursos para cumplir con los objetivos empresariales en un entorno de mercado específico.

El problema de *lot-sizing* es una cuestión de planificación a mediano plazo que involucra decisiones sobre materiales, cantidades de producción y tamaños de lote para alcanzar los objetivos empresariales, como la minimización de costos y la satisfacción de la demanda (Karimi et al., 2003). Los autores destacan que tales decisiones son fundamentales, dado que afectan directamente la productividad y el rendimiento de la firma. Identifican las características fundamentales de los modelos de *lot-sizing*, que incluyen el horizonte de planificación, la demanda, el número de productos, las restricciones y la escasez. El horizonte de planificación puede ser finito, asociado a una demanda dinámica, o infinito, vinculado a una demanda estacionaria. La demanda puede ser estática (constante en el tiempo) o dinámica, y esta última puede ser determinista (conocida previamente) o probabilista (estimada mediante cálculos de probabilidad), siendo esta última más compleja en términos de resolución.

El *lot-sizing* se aplica tanto a un solo producto como a múltiples bienes, siendo los modelos multi-ítem más complejos que los univariantes. Además, las restricciones adicionales, como capacidad de almacenamiento, presupuesto, personal y maquinaria, aumentan la dificultad del problema. En caso de escasez de bienes, los modelos pueden contemplar la opción de satisfacer la demanda futura mediante backlogging o no cubrirla completamente. Usualmente, se incluye un costo de escasez en la función objetivo para mitigar el impacto de la escasez.

Modelo *lot-sizing*

Karimi et al. (2003) propusieron el modelo que se muestra en el cuadro 2.1. Este modelo busca optimizar el proceso de lot-sizing considerando costos asociados a producción, almacenamiento y escasez, mientras se ajusta a las restricciones operativas.

Componentes	Formulación Canónica	Descripción
Notación matemática	I_t	Inventario disponible al final del período t .
	d_t	Demanda del producto en el período t .
	X_t	Cantidad producida en el período t .
	C_t	Costo de producción por unidad variable en el período t .
	h_t	Costo de almacenamiento por unidad en el período t .
	S_t	Costo de instalación en el período t .
	Y_t	Variable binaria: 1 si el producto se produce en el período t , 0 si no.
Función Objetivo	$\min Z = \sum_{t=1}^T (S_t Y_t + C_t X_t + h_t I_t)$	Minimizar el costo total de producción, instalación y almacenamiento.
Restricciones	$X_t + I_{t-1} - I_t = d_t, \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$	Restricción de flujo: Equilibrio entre producción, inventario y demanda. El objetivo es que la producción del período, junto con el inventario del período anterior, se iguale a la demanda y al stock actual registrado
	$X_t \leq Y_t \sum_{i=1}^t D_i, \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$	Limitación de producción según capacidad disponible.
	$Y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$	Indicador binario de producción.
	$X_t, I_t \geq 0, \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$	Restricción de no negatividad para producción e inventario.

Cuadro 2.1: Tabla de componentes, formulación canónica y descripción

En esta tesis se adapta el modelo para incluir demanda estocástica y fijación de precios, empleando un modelo logit multinomial restringido para capturar la conducta del consumidor y aplicar restricciones de lot-sizing mediante ecuaciones cut-off.

2.1.3. Demanda estocástica

La demanda es esencial para la optimización en la toma de decisiones empresariales y puede ser representada de diversas formas: la demanda estática, constante en el tiempo, y la demanda estocástica, que refleja un consumo dinámico probabilista y es más compleja (Castro et al., 2013). La investigación desarrolla un modelo que usa demanda estocástica para parametrizar el consumo y determinar los precios de los bienes según las preferencias de los consumidores.

Cuando se examina la integración en la toma de decisiones sobre producción, inventario y fijación de precios, se consideran tanto los entornos estáticos como los dinámicos. En un contexto estático, Burwell et al. (1997) analizan los efectos sobre el precio y el tamaño del lote, incorporando parámetros como los descuentos por cantidad y el flete bajo una demanda lineal. Chang (2013) amplía este trabajo para analizar los descuentos cruzados sobre las mismas variables. Además, Taleizadeh et al. (2020) consideran el impacto de las emisiones de dióxido de carbono en estas decisiones. En un contexto dinámico, los trabajos seminales de Thomas (1970) y Wagner & Whitin (1958) destacan la variabilidad de los precios óptimos en distintos periodos, independientes entre sí. Estos trabajos incluyen modelos matemáticos y algoritmos que abordan decisiones si-

multáneas de precio y producción para un único producto con una función de demanda determinista, excluyendo los pedidos pendientes. Zhang et al. (2008) desarrollaron un modelo analítico que informa de las decisiones sobre precios, promociones e inventarios para un único artículo dentro de un horizonte finito, centrándose en la maximización de beneficios mediante revisiones periódicas. Dong et al. (2009) estudiaron políticas dinámicas de fijación de precios y control de inventarios para productos sustitutivos en el suministro a largo plazo de un minorista con periodos de venta cortos, utilizando un modelo de elección discreta logit multinomial para la demanda de los consumidores. Smith et al. (2009) abordaron la optimización de la planificación conjunta de inventarios, producción y fijación de precios para un único artículo con limitaciones de capacidad e inventario, maximizando los beneficios en un horizonte multiperiodo discreto. Avinadav et al. (2014) propusieron y analizaron dos modelos matemáticos para la fijación óptima de precios, cantidad de pedido y periodo de reposición, considerando funciones de demanda separables en componentes de precio y antigüedad. A partir de estos trabajos, algunos autores ampliaron el análisis para incorporar precios de referencia en las dinámicas de inventario y fijación de precios, suponiendo una valoración positiva por parte del consumidor de los cambios de precio a lo largo del tiempo (Güler, 2013; Güler et al., 2014; Xue et al., 2016; Liu et al., 2019).

2.1.4. Modelo Logit multinomial restringido

Un modelo de estimación de la demanda muy aceptado y utilizado en marketing para analizar las preferencias de compra de los consumidores es un modelo de elección discreta conocido como logit multinomial (MNL) y sus extensiones. Estos modelos, enraizados en la teoría microeconómica de maximización de la utilidad, se han integrado en diversos estudios teóricos y aplicados. En el ámbito de las decisiones logísticas y de producción, la consideración conjunta de los precios de venta de uno o más productos ha sido explorada por investigadores como Lüer-Villagra & Marianov (2013) y Wang et al. (2023). Ghasemy Yaghin et al. (2014) propusieron un modelo multietapa que incorporaba decisiones sobre el tamaño del lote, la fijación de precios y la coordinación, utilizando una función de demanda logit multinomial. Terzi et al. (2023) se centraron en las decisiones de precio y tamaño de lote para un fabricante que vende un único producto a través de distintos canales, con el objetivo de diseñar un plan de producción

y unos precios óptimos. Adeinat et al. (2022) estudiaron la coordinación de la cadena de suministro mediante un modelo no lineal de optimización entera, haciendo hincapié en la importancia de considerar precios de venta variables para minoristas dispersos geográficamente con estructuras de costos y estrategias de comercialización distintas. Sus conclusiones sugieren que los modelos con precios de venta variables generan mayores beneficios que los que tienen precios de venta uniformes, y proponen un algoritmo de recocido simulado (SA) para optimizar la solución. Un supuesto importante de los modelos logit multinomiales (MNL) clásicos es el comportamiento compensatorio de los responsables de la toma de decisiones, que implica una estrategia de decisión que permite el intercambio o la variación entre los valores de los atributos para mantener un nivel fijo de utilidad (Adane et al., 2023; Zheng et al., 2024). Sin embargo, estos modelos no tienen en cuenta umbrales o límites en los atributos, como el precio, y suelen pasar por alto el impacto de la escasez de productos o la competencia entre consumidores por unidades limitadas. En escenarios prácticos en los que los supuestos ilimitados no son realistas, es necesario restringir o penalizar alternativas específicas para ajustarse a las restricciones del sistema y de los consumidores. Basándose en los trabajos de Swait & Adamowicz (2001); Cascetta & Papola (2001); Martínez et al. (2009) proponen un modelo heurístico multinomial logit restringido (MNL). Este modelo incorpora la función de utilidad de los consumidores y las restricciones endógenas del sistema, incluyendo la capacidad o la oferta de bienes y servicios. Se parte del supuesto de que la utilidad puede separarse en términos compensatorios y no compensatorios, que indican la viabilidad o disponibilidad de cada alternativa. Para ello se utilizan funciones de corte o de penalización logarítmica, que pueden imponerse a atributos individuales o a condiciones del sistema. Estas funciones de penalización facilitan una transición suave entre el espacio compensatorio factible y el espacio no compensatorio no factible, permitiendo ligeros incumplimientos de ciertas restricciones.

Las aplicaciones recientes del modelo logit multinomial restringido (CMNL) abarcan diversos ámbitos, como la elección del modo de transporte (Castro et al., 2013), la selección de escuelas (Martínez et al., 2011), la economía urbana (Martínez & Donoso, 2010; Martínez & Hurtubia, 2006), la tarificación de aparcamientos (Zhang & Zhu, 2016), la modelización de ubicaciones (López-Ospina et al., 2021), el desarrollo de energías renovables (Oehlmann et al., 2021) y la modelización de la elección de rutas en

redes de transporte ferroviario urbano (Shih et al., 2024). Para integrar las características de los consumidores, se utiliza el logit multinomial (MNL), que evalúa la utilidad de los clientes (Pérez et al., 2016). La variante logit multinomial restringida (CMNL) permite una descripción más precisa al considerar la máxima disposición a pagar (MWTP) mediante funciones cut-off. Además, se pueden aplicar restricciones adicionales usando funciones suavizadas para detallar el comportamiento del consumidor. Según Castro et al. (2013), los modelos MNL incluyen componentes deterministas y aleatorios, mientras que CMNL añade un componente no compensatorio para atributos cercanos a umbrales. López-Ospina et al. (2021) demuestran que CMNL ofrece una representación más realista al considerar restricciones endógenas. Esta investigación analiza el consumo de dos productos sustitutos, incluyendo funciones suavizadas de atractividad y sensibilidad al precio, además de evaluar la producción y almacenamiento disponibles. Aunque el CMNL se ha empleado en decisiones de fijación de precios (Pérez et al., 2016; Pérez & López-Ospina, 2022), principalmente analizando el impacto de las restricciones en la disponibilidad máxima de pago a los distintos consumidores, ninguno de los modelos incorpora la influencia de las restricciones exógenas o del sistema en un entorno dinámico o intertemporal de gestión integrada de inventarios con fijación de precios. Los modelos de demanda basados en CMNL se convierten en problemas multidimensionales de punto fijo cuando incorporan restricciones del sistema como las capacidades o la oferta. Esto se debe a que la decisión de compra de un agente influye en las decisiones de los demás y puede alterar las preferencias de aquellos que no tienen acceso a un producto debido a su escasez.

2.1.5. Método de punto fijo

Este método analiza la convergencia de las variables y confirma la existencia de una solución a través de un proceso iterativo, donde el objetivo es que el valor x coincida con la estimación dada por la función $g(x)$ evaluada en x (Biazar & Amirteimoori, 2006). A continuación se ilustra este procedimiento:
Sea $g(x)$ una función dada, definimos $f(x)$ como:

$$f(x) = g(x) - x \tag{2.1}$$

El objetivo es minimizar $f(x)$, lo que se puede expresar como:

$$\min f(x) = \min (g(x) - x) \quad (2.2)$$

La raíz de $f(x)$, denotada como x^* , se encuentra cuando:

$$f(x^*) = 0 \iff g(x^*) - x^* = 0 \iff g(x^*) = x^* \quad (2.3)$$

Para alcanzar esta solución, se inicia con una estimación inicial de x y se refina iterativamente para asegurar la convergencia de $f(x)$.

En el estudio, se aplica el método de punto fijo para estimar el inventario de productos y se utiliza la optimización por enjambre de partículas (PSO) para resolver el problema de optimización.

2.1.6. Optimización por enjambre de partículas

Los algoritmos de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), se basan en la modelización del comportamiento social observado en agrupaciones naturales como manadas y bandadas (Kennedy & Eberhart, 1995). Este método heurístico utiliza partículas que se mueven estocásticamente en el espacio de búsqueda, ajustando su velocidad en función de la mejor posición local y global encontrada.

Parsopoulos & Vrahatis (2010) describen cinco principios básicos de la inteligencia de enjambre, propuestos por Millonas (1994) (Van Den Bergh (2001)): 1. Proximidad (el enjambre debe ser capaz de realizar cálculos simples en el espacio y el tiempo), 2. Calidad (el enjambre debe ser capaz de percibir los cambios de calidad en el entorno y responder a ellos), 3. Diversidad de respuestas (el enjambre no debe limitar su forma de obtener los recursos en un ambiente estrecho), 4. Estabilidad (el enjambre no debe cambiar su modo de comportamiento con cada cambio ambiental) y 5. Adaptabilidad (el enjambre debe cambiar su modo de comportamiento cuando este cambio lo amerite).

Descripción de Algoritmo PSO

En el contexto del algoritmo, se establece un enjambre S compuesto por N partículas (x_i), que representan posibles soluciones candidatas al problema de optimización. Estas

partículas evolucionan durante t iteraciones en el espacio de búsqueda $\mathcal{A}$ para identificar la solución óptima. Se tiene:

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad (2.4)$$

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathcal{A}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

Cada partícula i posee una posición p_i y una velocidad v_i en cada iteración t :

$$p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})^T \in \mathcal{A}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.6)$$

$$v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})^T \in \mathcal{A}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

La velocidad de cada partícula se actualiza considerando la mejor posición encontrada hasta el momento para dicha partícula, que corresponde a la solución que minimiza la función objetivo $f_i = f_i(x_i)$:

$$p_i(t) = \arg \min_t f_i(t) \quad (2.8)$$

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\} \quad (2.9)$$

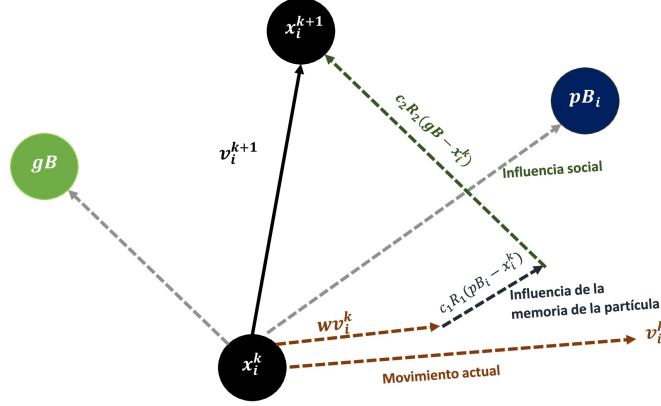
El algoritmo también incorpora un componente de comportamiento social, lo que implica la comunicación entre partículas. Así, se define la mejor posición global hasta la iteración t como aquella partícula que proporciona el valor mínimo global de la función objetivo dentro del enjambre:

$$p_g(t) = \arg \min_t f(p_i(t)) \quad (2.10)$$

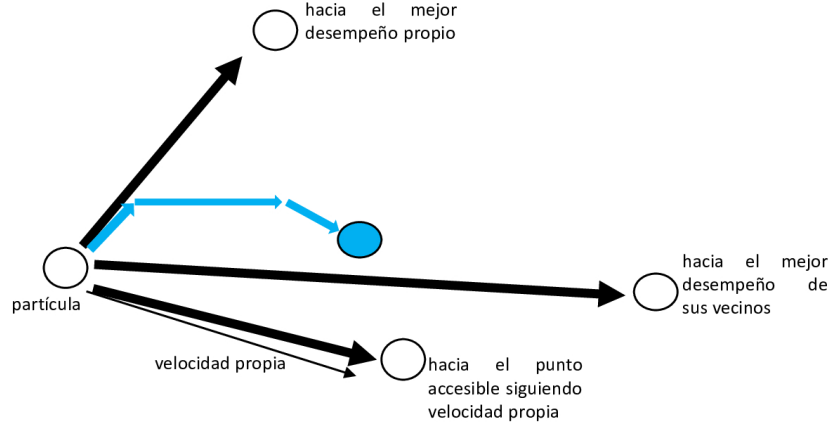
Esto asegura que la búsqueda se realice de manera colaborativa, utilizando tanto el conocimiento individual como el colectivo para mejorar la convergencia hacia la solución óptima.

Las figuras 2.1(a) y 2.1(b) muestran las variables que determinan el procedimiento de iteración y la nueva posición de la partícula x_i en la iteración $k + 1$, incluyendo el mejor rendimiento individual (influencia de su memoria), el mejor rendimiento global (influencia social), y la velocidad de la iteración anterior (v_i^k). Cada partícula ajusta su posición en el espacio de soluciones mediante tres componentes: (1) Velocidad propia,

la cual guía su movimiento por inercia; (2) Mejor desempeño propio, la cual atrae hacia el óptimo histórico; y (3) Mejor desempeño de vecinos, la cual orienta hacia el mejor hallazgo de sus vecinos, promoviendo la cooperación en la búsqueda de soluciones óptimas (Dubreil et al., 2005; Wang et al., 2018).



(a) Esquema de iteración de partículas.



(b) Ajuste de posición de una partícula en el espacio de solución.

Figura 2.1: Representación de la iteración y posicionamiento de partículas en PSO.

Shiet al. (2001) proponen la variante de PSO que es utilizada en este estudio y se define mediante las siguientes ecuaciones:

$$v_{ij}(t+1) = w(t) \cdot v_{ij}(t) + c_1 \cdot R_1 \cdot (p_{ij}(t) - x_{ij}(t)) + c_2 \cdot R_2 \cdot (p_{gj}(t) - x_{ij}(t)) \quad (2.11)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(t+1) \quad (2.12)$$

$$w(t) = w_{\max} + (w_{\max} - w_{\min}) \cdot \frac{t}{T} \quad (2.13)$$

En este modelo, c_1 y c_2 representan los coeficientes de aprendizaje cognitivo y social, respectivamente, mientras que R_1 y R_2 son términos aleatorios entre 0 y 1. El peso de inercia $w(t)$ ajusta la velocidad de la partícula, favoreciendo una exploración global inicial y una convergencia más local en iteraciones posteriores, lo que mejora la capacidad de convergencia en comparación con el algoritmo original (Jaberipour et al., 2011).

2.2. Diseño de campañas de retención de clientes

El autor Neslin et al. (2006) definió la rotación de clientes como la tendencia de los clientes a dejar de hacer negocios con una empresa en un periodo de tiempo determinado. La predicción de la rotación de clientes se encuentra en el centro de los esfuerzos de la campaña de retención. La predicción de *churner* y *no-churner* (quien abandona o no-abandona, por su significado en español y que se usará churn en adelante) es una herramienta útil para predecir el riesgo de abandono del cliente. Otros autores como Pérez et al. (2016), Zambrano-Rey et al. (2019), López-Ospina et al. (2021), Maldonado et al. (2021) y Page et al. (2021), coinciden con esta definición.

Extendiendo el modelo de Neslin et al. (2006), los autores Verbraken et al. (2012), Óskarsdóttir et al. (2018) y Maldonado et al. (2021), desarrollan esquemas para definir campañas óptimas, ayudando a los tomadores de decisiones a definir a cuáles clientes aplicar la campaña y a cuáles no, a modo de maximizar la utilidad que se puede atribuir a la aplicación de la campaña. Esta investigación tiene dos etapas, la primera se enfoca en la elaboración de una categorización de clientes, que permite ordenarlos para conocer cuál de ellos tiene mayor propensión a dejar de ser clientes y cambiar de empresa, lo que se realizará con la técnica de inferencia difusa MISO²-Mamdani (Geramian & Abraham, 2021), la que a través del análisis de factores como el valor de las compras, la frecuencia con la que realizan las compras y la fidelidad de los clientes, define reglas lógicas, con las que se usa lógica difusa para definir la categorización de los clientes. La segunda etapa, específicamente, es el diseño de la campaña de retención propiamente como tal, la cual será desarrollada con la familia de métodos que derivan del autor Neslin et al. (2006).

²Sistemas difusos con múltiples entradas de salida única (Multiple Input Single Output, por sus siglas en inglés)

En la etapa de construcción de modelos de predicción, se pueden identificar al menos las siguientes tendencias de investigación, algunos autores se inclinan por modelos econométricos explicativos Smail & Weijia (2017); Tamaddoni et al. (2017); Malesios et al. (2018); Van den Bulte et al. (2018); Lemmens & Gupta (2020). Otros autores utilizan modelos de la familia de aprendizaje de máquinas no supervisado, como por ejemplo: Abbasimehr et al. (2011, 2013); Backiel et al. (2016); Kuo & Kusiak (2019), y otros lo hacen con modelos supervisados como son: Xie et al. (2009); Coussement et al. (2010); Yu et al. (2011); Verbeke et al. (2011a); Coussement (2014a); Maldonado et al. (2015); Gordini & Veglio (2017); Coussement et al. (2017a); De Caigny et al. (2018); Amin et al. (2019). Otros autores han realizado predicción de *churn* con métodos tipo Mamdani, como: Papa et al. (2021); Sharma et al. (2022).

El autor Geramian & Abraham (2021) desarrolla una metodología que calcula los valores FLPN desfuzificados mediante la multiplicación de los factores de entrada: valor de compra (V), frecuencia de compra (F) y lealtad (L) (Madzík & Shahin, 2020), la definición de reglas lógicas, con las que se usa lógica difusa, para convertir éstos en índices de prioridad o ponderación, que se utilizaron para efectos de categorización de los clientes. En este trabajo se aborda un esquema similar, en el que se consideran los tres factores de entrada tales como: el valor de las compras (V), la frecuencia de las compra (F) y la lealtad de los clientes, para determinar un valor numérico (D) para cada cliente y las categorizaciones de éstos en *churner* y *no-churner*, de acuerdo a la propensión a dejar o no la empresa, lo que sirve para definir a cuáles de ellos se debe aplicar o no la campaña.

Muchos autores han abordado el diseño de campañas de retención (Bolton, 1998; Gerpott et al., 2001; Wei & Chiu, 2002; Neslin et al., 2006; Olson & Chae, 2012; Verbraken et al., 2012; Coussement et al., 2017a; Keramati et al., 2020; Uner et al., 2020; Kozak et al., 2021; Routh et al., 2021; Vo et al., 2021).

El autor referente Neslin et al. (2006) proporcionó un marco para caracterizar qué tan bueno es un modelo para predecir la probabilidad de abandono en términos de una métrica de ganancias que mide la efectividad de una campaña de retención de clientes dependiendo de los resultados de un modelo predictivo. El documento proporciona una métrica común para medir campañas con diferentes modelos y con esta métrica permitió calcular la ganancia.

Es con el marco definido por Neslin et al. (2006) que autores como Verbraken et al. (2012), Óskarsdóttir et al. (2018) y Maldonado et al. (2021), profundizaron en la idea de Neslin introduciendo cada vez mayores complejidades en la caracterización de clientes. Nosotros nos enfocaremos en esta última línea Neslin et al. (2006), Verbraken et al. (2012), Óskarsdóttir et al. (2018), Maldonado et al. (2021), con el objetivo de definir a cuáles clientes aplicar o no campañas de retención. Englobando nuestro estudio en este contexto, pretendemos aportar en la etapa de categorización de clientes con el enfoque de Geramian & Abraham (2021), enlazándolo con una extensión del modelo de Neslin et al. (2006), en la cual se considera el cálculo de un umbral de corte óptimo que permita decidir a cuáles clientes aplicar o no la campaña de retención.

Los aspectos principales en esta parte de la investigación son la prevención de la pérdida de clientes, la optimización orientada a beneficios y el análisis prescriptivo. Dado que estos temas abarcan un amplio espectro, hemos enfocado nuestra revisión bibliográfica en la brecha identificada y en los trabajos fundamentales para esta investigación. En este marco, hemos dividido esta sección en dos subsecciones interrelacionadas. La primera subsección revisa los métodos existentes para la predicción del churn, con un énfasis en el esquema que utilizamos como base, el cual emplea inferencia de lógica difusa. La segunda subsección identifica la brecha en la literatura que nos lleva a este esquema de análisis prescriptivo, destinado a abordar la rotación de clientes, al tiempo que se definen los incentivos que deben ofrecerse a estos clientes. Además, analiza la definición y relevancia de prevenir la rotación utilizando métricas basadas en beneficios.

2.2.1. Predicción del churn

La pérdida de clientes se ha convertido en un problema relevante que afecta a muchas industrias y en uno de los principales desafíos que muchas organizaciones están enfrentando (Mitkees et al., 2017; García et al., 2017). Hoy en día, el análisis de esquemas de rotación de clientes se aplica a diferentes sectores tales como: mercados financieros (Tang et al., 2014), retail (Miguéis et al., 2012), proveedores de servicio de correo electrónico (Becker et al., 2020), telecomunicaciones (Nath & Behara, 2003), entre otros. La predicción de la rotación de clientes se encuentra en el centro de los esfuerzos de la campaña de retención. Esta temática adquiere particular relevancia en el sector de las telecomunicaciones, donde, como indican (Gerpott et al., 2001; Wei & Chiu, 2002;

Coussement et al., 2017a) el estudio del churn es relevante.

En el ámbito de la predicción de *churn*, los autores se han centrado en estudiar el rendimiento de los modelos; entre los aspectos que conducen a una mejora se incluyen la incorporación de datos textuales (De Caigny et al., 2020), la consideración de metodologías de aprendizaje sensible a los costos (Coussement, 2014b), el uso de técnicas específicas de preparación de datos (Coussement et al., 2017b), el uso de técnicas avanzadas de machine learning (Al-Hashmi et al., 2022), la combinación de técnicas avanzadas de muestreo y aprendizaje sensible a los costos (Burez & den Poel, 2009), el uso de un enfoque basado en el aprendizaje activo (Verbeke et al., 2011a), y el empleo del enfoque híbrido SVM+NBTree propuesto (Verbeke et al., 2011b), entre otros.

En un contexto donde la entrada de nuevos clientes es limitada debido a altas tasas de penetración de mercado, el churn emerge como un indicador primordial de la competencia. En esta línea, Dick & Basu (1994) desarrollaron un marco conceptual para comprender la lealtad del cliente, destacando la importancia de la interacción entre la calidad del servicio ofrecido por la empresa y la percepción de dicho servicio por parte de los consumidores.

Un prerequisite fundamental para enfocarse en el segmento óptimo de clientes implica llevar a cabo una categorización efectiva de estos, tal como lo sugiere Madzik & Shahin (2020), y, adicionalmente, predecir y analizar la rotación de clientes, según Abbasimehr et al. (2013). La literatura existente revela que se han efectuado análisis exhaustivos sobre tales esfuerzos de categorización, especialmente en relación con el nivel de lealtad del cliente. La noción de lealtad se cimienta en el desarrollo de un vínculo psicológico entre el cliente y una empresa, marca o producto, tal como discuten Meyer-Waarden (2008); Choi & Choi (2014); Wieseke et al. (2014). Esta conexión se evidencia a través de compras reiteradas, una cierta tolerancia a variaciones de precio y recomendaciones positivas por parte de los clientes.

Oliver (1999) define la lealtad como un compromiso arraigado de continuar comprando o apoyando un producto o servicio preferido de manera consistente en el futuro, manifestándose en la adquisición recurrente de la misma marca o un conjunto específico de marcas. Esto ocurre a pesar de circunstancias situacionales y esfuerzos de marketing que podrían inducir un cambio de comportamiento.

Con base en esta definición, un número considerable de organizaciones aplican sistemá-

ticamente los principios y herramientas de la experiencia total del cliente para generar, reforzar y mantener una lealtad duradera de los clientes (Mascarenhas et al., 2006), y los directivos definen la lealtad como el compromiso de seguir comprando un producto o servicio, sean cuales sean las circunstancias (Narayandas, 2005). Además, el valor percibido del programa de fidelización era un predictor significativo de la lealtad hacia el programa. A su vez, la fidelidad al programa predijo la fidelidad del cliente, medida por las actitudes, la insensibilidad a los precios, el boca a boca y el compromiso (Tanford & Baloglu, 2013). Aunque no existe una metodología o enfoque único para medir la lealtad, la literatura muestra varios métodos utilizados para este fin, como por ejemplo: Net Promoter Score (NPS) (Reichheld, 2003), Loyalty Ladder (Narayandas, 2005; Mascarenhas et al., 2006; Bandyopadhyay & Martell, 2007).

En un reciente trabajo, Madzik & Shahin (2020) pone mayor énfasis en la integración de factores conductuales junto a los actitudinales en el estudio de la lealtad del cliente. Inspirándose en la metodología del Análisis Modal de Fallos y Efectos (FMEA)—una técnica consolidada en la gestión de riesgos y control de calidad, que calcula el Número de Prioridad de Riesgo (NPR) multiplicando tres factores de riesgo—, Madzik propone el cálculo del Número de Prioridad de Lealtad (LPN). Este índice se deriva del producto de tres dimensiones clave de lealtad: el valor de compra del cliente (V), la frecuencia de compra (F) y la lealtad (L). Posteriormente, el LPN se utiliza como un índice global para la clasificación de clientes. No obstante, la fórmula de multiplicación básica del FMEA, empleada en la metodología de Clasificación Tridimensional de Clientes (TDCC) de Madzik, ha sido objeto de extensas críticas en la literatura especializada.

Sistema de inferencia difusa tipo Mamdani

El método de Mamdani es una técnica de inferencia difusa, una forma de lógica multivaluada desarrollada por Zadeh (1965), especialmente diseñado para la modelización y control de sistemas mediante reglas específicas y utilizado en sistemas de control difuso debido a su capacidad para integrar y procesar múltiples entradas simultáneamente (multiple input), convergiendo en una única salida (single output) determinada por reglas definidas, lo que optimiza la precisión y la respuesta del sistema en entornos complejos y dinámicos.

Dicha lógica permite representar y tratar matemáticamente situaciones imprecisas, am-

biguas o vagas, características comunes en situaciones del mundo real. En contraste con las lógicas tradicionales, que operan bajo valores binarios (como verdadero o falso), la lógica difusa maneja grados de verdad, representados generalmente en un rango continuo entre 0 y 1.

Ebrahim Mamdani aplicó por primera vez esta técnica en un controlador de velocidad para motores eléctricos, de ahí su nombre. La Metodología MISO Mamdani se estructura en varios pasos fundamentales:

- a) Definición de las variables de entrada y salida: En esta fase inicial, se identifican y delimitan las variables que formarán parte del sistema a controlar, cuyas especificaciones se detallarán posteriormente.
- b) División del rango de las variables en conjuntos difusos: Cada variable se segmenta en conjuntos difusos que representan diversas condiciones o estados posibles.
- c) Fuzzificación: Dado que la mayoría de las variables son inicialmente numéricas, se procede a convertirlas en términos lingüísticos difusos. Este proceso facilita la modelización de situaciones complejas y realistas mediante entradas imprecisas.
- d) Creación de reglas difusas: Se establecen reglas difusas en forma de "si-entonces", las cuales especifican cómo las variables de entrada influyen a la variable de salida. La cantidad total de reglas en un modelo de inferencia difusa Mamdani se determina multiplicando el número de funciones de pertenencia de cada variable de entrada.
- e) Inferencia difusa: En esta etapa, se evalúa la contribución de cada regla difusa al resultado final. Utilizando la lógica difusa, se combina la información proveniente de todas las reglas para obtener una salida difusa.
- f) Defuzzificación: La salida difusa obtenida se transforma en un valor concreto, el cual puede ser utilizado para controlar efectivamente el sistema. La defuzzificación implica la integración de la información de todas las reglas en un único valor numérico utilizable.

La metodología MISO (Multiple Input Single Output, por sus siglas en inglés) Mamdani permite tomar decisiones basadas en reglas lingüísticas y es especialmente útil en

situaciones en las que la información es imprecisa o subjetiva. En la figura 2.2, se ilustra el diagrama a bloques del sistema difuso con una análoga arquitectura del sistema general de control difuso (Sabri et al., 2013; Cárdenas León et al., 2016) que son la base fundamental de las etapas utilizadas en este modelo de Mamdani.

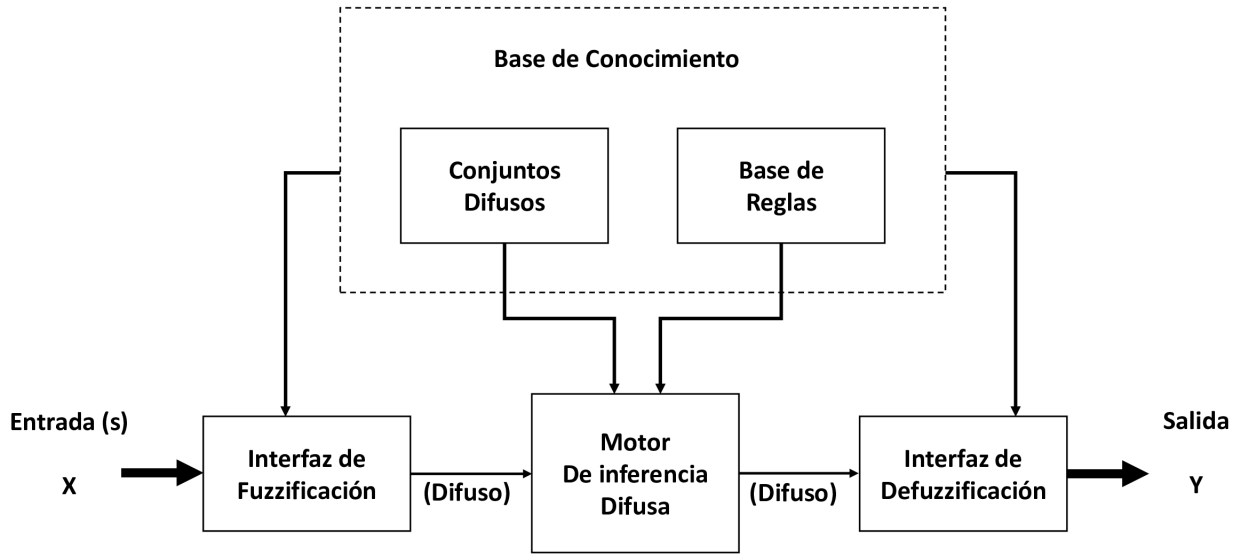


Figura 2.2: Descripción del sistema difuso.

El método FIS tipo Mamdani ha sido ampliamente aplicado en diversas áreas, como el análisis de falla FMEA (Geramian et al., 2017) y partiendo de la necesidad de modelos más sofisticados y precisos, ofrece una alternativa avanzada. Este método tiene diversas aplicaciones, como el análisis del valor percibido por el cliente, la evaluación del rendimiento educativo y el diagnóstico de la degradación del rendimiento (Geramian et al., 2017, 2020; Yazıcı et al., 2021; Zanon et al., 2020; Cervero et al., 2020; Kang et al., 2017). Específicamente, en el ámbito de la evaluación de la lealtad del cliente, el enfoque de inferencia difusa aborda las limitaciones de modelos más simples como el LPN al incorporar un manejo más matizado de múltiples factores de entrada, proporcionando así un marco sólido para la priorización de clientes y proveedores en cadena de suministro (Imran et al., 2020), la priorización de clientes en sistemas de colas (MahmoumGonbadi et al., 2019), y la evaluación general de la lealtad del cliente (Ghani et al., 2018). Esta metodología avanzada supera la naturaleza simplista de la fórmula de multiplicación de LPN y mejora la precisión predictiva y la utilidad estratégica de las métricas de

fidelización de clientes.

Además, se evidencia una diversidad de aplicaciones sofisticadas de los sistemas difusos. En primer lugar, Castillo et al. (2012) emplearon un sistema de inferencia difusa para amalgamar los resultados de tres clasificadores, incluyendo K-vecinos más cercanos difusos y dos redes neuronales multicapa para clasificación. En segundo lugar, Castillo et al. (2016) fusionaron la lógica difusa con los principios de control y computación para el control de vuelo. En tercer lugar, Ontiveros-Robles & Melin (2020) idearon un sistema asistido por computadora que se vale de la lógica difusa y funciones de pertenencia para abordar problemas de diagnóstico. Finalmente, Ontiveros-Robles et al. (2020) propusieron la inclusión de insumos no singleton en sistemas difusos para tareas de clasificación.

Además, la literatura pertinente abarca una gran cantidad de aplicaciones y/o mejoras de sistemas difusos. Por ejemplo, Tavana et al. (2021) modificaron el WINGS difuso y lo aplicaron a la toma de decisiones sobre tecnologías avanzadas de la NASA. Por otro lado, Montazeri-Gh & Yazdani (2020) emplearon sistemas lógicos difusos para la detección e identificación de fallas en una turbina de gas. En otro contexto, Juang et al. (2021) integraron reglas difusas en un enfoque para el seguimiento de palmas de mano en tres dimensiones, implementadas en un sistema que simula la parte superior del cuerpo de un robot. Finalmente, Xue et al. (2021) utilizaron una variedad de herramientas y técnicas, como el conjunto de imágenes borrosas y el Mejor Peor Método (Best Worst Method, BWM por sus sigla en inglés), para la monitorización de fallas y la evaluación de la seguridad operativa.

Nuestra investigación utiliza un sistema experto y el enfoque de inteligencia artificial de Fuzzy Inference System (FIS) (Liu et al., 2013; Geramian et al., 2017, 2019, 2020) para abordar la predicción del *churn* (pérdida de clientes). Inicialmente, un Mamdani FIS con una sola salida y múltiples entradas categoriza a los clientes en función de su propensión a la rotación, calculando un valor numérico D a partir de la defuzzificación del valor de compra (V), frecuencia de compra (F), y fidelidad (L) (Geramian & Abraham, 2021). En el contexto del modelo difuso de Mamdani, se emplean tres variables clave para calcular el LPN (Número de Prioridad de Lealtad) Madzík & Shahin (2020), el cual se define como una función de estas variables:

Valor de compra: Esta variable, representa el gasto monetario total que realiza un

cliente en una transacción específica. Este indicador es importante para comprender el comportamiento del consumidor, ya que revela su rentabilidad y grado de compromiso con un producto o marca específica. En el modelo difuso de Mamdani, el valor de compra desempeña un papel fundamental como entrada vital para el sistema. Incorporar este criterio permite establecer reglas que guían la toma de decisiones basadas en datos críticos, como los obtenidos de la variable "MonthlyCharge" seleccionada de una base de datos alojada en www.kaggle.com. Esta variable refleja el importe que cada cliente paga mensualmente, ajustado dentro de un rango de cero a diez para facilitar su integración en el sistema de inferencia difusa.

Frecuencia de compra: Esta variable, indica cuántas veces un cliente realiza transacciones en un período dado, proporcionando información esencial sobre su lealtad y compromiso con una empresa. En el modelo difuso tipo Mamdani, esta variable es relevante como otra entrada clave. La inclusión de la frecuencia de compra permite establecer reglas que mejoran la precisión de las decisiones tomadas. Se utilizó la variable "tenure", que representa la duración en meses que un cliente ha estado vinculado a la empresa, normalizada para ajustarse al rango de cero a diez, conforme a los requisitos del sistema difuso.

Lealtad: Es la variable más significativa entre las tres, ya que refleja el grado de fidelidad de un cliente hacia una marca específica. Obtener esta métrica presentó desafíos, pues no estaba directamente disponible en la base de datos de Kaggle. Para estimarla, se desarrolló un código en PythonTM basado en el NPS (Net Promoter Score), un indicador utilizado ampliamente para medir la lealtad, calibrado en una escala de 0 a 10. Este enfoque sigue principios similares a los establecidos por Reichheld (2003) para evaluar la lealtad. La variable de lealtad desempeña un papel esencial en el sistema de inferencia difusa, ejerciendo un impacto significativo en los resultados finales del modelo.

LPN: En el marco del sistema difuso, el LPN (Número de Prioridad de Lealtad) opera como una métrica inicialmente expresada en términos lingüísticos, vinculada estrechamente a variables clave como el valor de compra (V), la frecuencia de compra (F) y la lealtad (L). Inicialmente, el LPN categoriza a los clientes en segmentos como potenciales, regulares o premium. Sin embargo, tras el proceso de defuzzificación, que transforma las salidas lingüísticas en valores numéricos precisos, el LPN se determina mediante infe-

rencia difusa y se defuzzifica, generando así un valor numérico en un intervalo específico de 1 a 100. Este enfoque permite una evaluación más precisa y cuantitativa del grado de lealtad de los clientes, facilitando la toma de decisiones estratégicas basadas en datos robustos y contextualizados dentro del sistema difuso.

2.2.2. Enfoque analítico prescriptivo

Nuestro análisis se inspira en la investigación de Neslin et al. (2006), que ofrece un marco exhaustivo para evaluar el rendimiento de las campañas de retención de clientes. Esta investigación destaca características clave, como la selección de los clientes con mayor propensión al *churn* (pérdida) y la evaluación explícita del impacto de la campaña en los beneficios de la empresa. Considera factores como la probabilidad de la aceptación de la campaña, los incentivos ofrecidos y el valor del ciclo de vida del cliente (CLV). En una publicación posterior, Verbraken et al. (2012) amplían el modelo de Neslin et al. (2006) incluyendo una representación explícita de la densidad de probabilidad relacionada con la propensión a aceptar la campaña. Sin embargo, a pesar de convertir explícitamente este parámetro en una variable aleatoria, no lo relaciona con el incentivo de la campaña, manteniendo el foco únicamente en el concepto de targeting propuesto inicialmente por Neslin. En concreto, la segmentación de clientes consiste en definir un umbral de probabilidad para determinar el último cliente al que se le ofrecerá una campaña de retención, teniendo en cuenta su probabilidad de abandono y las métricas de beneficios.

Posteriormente, Óskarsdóttir et al. (2018) propusieron una mejora en la orientación al cliente al considerar explícitamente la heterogeneidad de los CLVs de los clientes. A partir de ahí, Maldonado et al. (2021) profundizan en el concepto, diferenciando por CLV e incorporando distintos umbrales para segmentos de clientes con CLV variables. En esta investigación, utilizando un esquema de predicción de inferencia difusa, ampliamos el trabajo de los autores anteriormente mencionados introduciendo explícitamente una condición que vincula el umbral de decisión al incentivo ofrecido en la campaña. En este caso, el incentivo no es un mero parámetro, sino una variable de decisión dentro de nuestro marco de análisis prescriptivo. Nuestro planteamiento inicial es sencillo: a medida que aumenta el incentivo, también lo hace la probabilidad de aceptar la campaña. Este marco hace avanzar nuestra investigación actual y abre vías para seguir explorando

en ámbitos como la diferenciación, la segmentación y la aplicación de otros esquemas de predicción. Este nuevo enfoque integra la segmentación con recomendaciones sobre los incentivos que se deben ofrecer en la campaña.

2.2.3. Optimización de profit para la retención de clientes

La optimización de beneficios en campañas de retención de clientes ha sido ampliamente estudiada en las últimas décadas. Modelos como *ProfLogit*, *ProfTree* y *ProfMPM* representan enfoques destacados en este campo, pero presentan limitaciones que la presente investigación busca superar.

2.2.3.1. Modelos de optimización de beneficios

1. ProfLogit

El modelo *ProfLogit* se basa en la estimación de probabilidades a través de la regresión logística, asociando características de los clientes con su propensión a aceptar incentivos. Su implementación es eficiente para escenarios estáticos donde las probabilidades no cambian con el tiempo.

Devos et al. (2018) introduce *ProfLogit* para maximizar las ganancias en aplicaciones de puntuación crediticia. Emplea un algoritmo genético para optimizar los coeficientes del modelo e integra la métrica Expected Maximum Profit (EMP), priorizando el beneficio neto sobre métricas tradicionales como el AUC, al considerar costos y beneficios en las decisiones de clasificación.

Stripling et al. (2018) propone un modelo *ProfLogit*, diseñado para maximizar el beneficio esperado máximo para la pérdida de clientes (EMPC) durante el entrenamiento, utilizando algoritmos genéticos y una estructura de modelo logístico regularizado por lazo. Este enfoque se diferencia de otros modelos predictivos al integrar la maximización de beneficios en la construcción del modelo, en lugar de enfocarse en medidas de precisión como el AUC.

Stripling et al. (2015) aborda la predicción de fuga de clientes mediante campañas de gestión de churn en el sector de las telecomunicaciones. Presenta *Proflogit*, un modelo de regresión logística optimizado mediante algoritmos genéticos para maximizar beneficios. A diferencia de enfoques tradicionales, *ProfLogit* integra el criterio Expected

Maximum Profit (EMP) en la fase de entrenamiento, priorizando el valor económico de las decisiones de clasificación.

El modelo *ProfLogit* considera las probabilidades de aceptación de incentivos y el retorno financiero esperado. Sin embargo, no incluye una relación dinámica entre los incentivos ofrecidos (δ) y las probabilidades de aceptación (γ), lo que limita su capacidad para ajustarse a escenarios cambiantes.

2. ProfTree

El modelo *ProfTree* emplea árboles de decisión para segmentar clientes y optimizar estrategias de retención. Aunque este modelo es efectivo para categorizar clientes, su rigidez en la estructura de los árboles limita su capacidad para capturar incertidumbre y relaciones complejas entre variables.

Höppner et al. (2020) propone un modelo *ProfTree* diseñado para optimizar la contribución al beneficio monetario esperado (EMPC) en el paso de construcción del modelo de un árbol de clasificación o decisión, utilizando un algoritmo evolutivo (GA adaptado para árboles de decisión) que optimiza la contribución al beneficio monetario esperado (EMPC). A diferencia de métodos como CART o C4.5, que realizan una búsqueda local y podrían quedarse en soluciones subóptimas, el algoritmo evolutivo permite explorar un espacio más amplio de posibles árboles, maximizando las ganancias.

En el modelo *ProfTree*, los árboles de decisión crean reglas jerárquicas para segmentar clientes en grupos homogéneos. Es útil en campañas con grandes bases de datos y necesidades de segmentación rápida, por lo que presentan esta dependencia de segmentaciones predefinidas. En resumen, *ProfTree* opera en un marco dinámico que busca mejorar la rentabilidad a través de su proceso de construcción de modelos iterativos y adaptativos, distinguiéndolo de los enfoques de optimización estáticos.

3. ProfMPM

El modelo *ProfMPM* se basa en métodos de programación matemática para maximizar beneficios, asumiendo escenarios estáticos. Utiliza programación lineal o no lineal para asignar recursos óptimos a las estrategias de retención. Aunque este modelo es útil en contextos simples, su escalabilidad es limitada en escenarios de alta dimensionalidad, con optimización estática que no se adapta a cambios en el comportamiento del cliente,

por lo que no aborda dinámicas complejas como las consideradas en esta investigación. Maldonado et al. (2020) propone una extensión de las Máquinas de Probabilidad Minimax (MPM) y sus variantes, adaptadas para la optimización de métricas de beneficios en campañas de retención de clientes. Su enfoque, denominado *ProfMPM*, introduce mejoras en el marco de las MPM tradicionales al integrar métricas económicas en el proceso de optimización, en lugar de depender de métricas estándar de clasificación como el AUC. El objetivo de la propuesta es maximizar una función de beneficio al tiempo que se garantiza una clasificación adecuada, incluso para la peor distribución de datos de los churners y no churners.

2.2.3.2. Aportes recientes a la discusión bibliográfica

Con el propósito de fortalecer la discusión bibliográfica, se incorporan referencias recientes que aportan un marco contextual actualizado y enriquecen la fundamentación teórica de esta investigación.

Manzoor et al. (2024) examinan cómo las empresas pueden aprovechar métodos de aprendizaje automático para anticipar y mitigar el abandono, con un enfoque de métricas basadas en rentabilidad.

Zdziebko et al. (2024) proponen una solución para identificar clientes con la propensión al churn y explicar los factores que contribuyen a éste, a través de la combinación de lógica difusa con datos reales de una empresa de telecomunicaciones.

Rosário & Dias (2022) proponen un marco que usa lógica difusa para transformar el marketing, enfocándose en mejorar la personalización, precisión y competitividad en la toma de decisiones. Esto permite a las empresas comprender mejor a sus clientes y adaptar sus estrategias en mercados dinámicos.

Kim et al. (2021) proponen un marco que aborda los desafíos de la incertidumbre climática mediante la integración de enfoques de optimización robusta (RO) con formulaciones de funciones objetivo o restricciones empleadas en la programación dinámica estocástica (RSDP) para mejorar la capacidad de los embalses, asegurando adaptabilidad y sostenibilidad a largo plazo.

Smaili & Hachimi (2020) proponen un enfoque práctico para resolver problemas de optimización en marketing, utilizando una metaheurística eficiente y adaptable (Bat Algorithm), proporcionando una mejora de la eficacia de las estrategias de marketing

en contextos complejos.

Azeem & Usman (2018) ofrece una herramienta integral y automatizada basada en lógica difusa (Fuzzy Rough Nearest Neighbors), que no solo predice el abandono de clientes con precisión, sino que también implementa estrategias de retención basadas en el análisis de datos de uso y quejas de clientes.

2.3. Inteligencia computacional y sus aplicaciones

El concepto de Inteligencia Computacional (IC) es una rama de la inteligencia artificial que se ocupa de la teoría, diseño, desarrollo y aplicaciones de paradigmas computacionales motivados lingüística y biológicamente, poniendo énfasis en las redes neuronales, algoritmos genéticos, programación evolutiva, sistemas difusos y sistemas inteligentes híbridos (Pérez, 2010).

La IC es un campo de la ciencia computacional que combina paradigmas y técnicas inspiradas en la naturaleza y el comportamiento humano para resolver problemas complejos. Estas técnicas incluyen:

- Computación Evolutiva (EC): Inspirada en la teoría de la evolución y optimización natural, incluye algoritmos como *PSO* (Optimización por Enjambre de Partículas), *Algoritmos Genéticos (GA)* y estrategias evolutivas.
- Lógica Difusa (Fuzzy Logic): Introducida por Lotfi Zadeh (1965), permite modelar incertidumbre y variables lingüísticas con un enfoque de "*pertenencia parcial*" para la toma de decisiones en sistemas complejos. Como ejemplo se tienen los Sistemas de Inferencia Difusa (FIS) tipo Mamdani, que se utilizan para tomar decisiones bajo incertidumbre.
- Redes Neuronales Artificiales (ANN): Basadas en el funcionamiento del cerebro humano, permiten el aprendizaje automático y la predicción a partir de datos. Asimismo, se combinan con lógica difusa en sistemas *neuro-difusos* para una mayor robustez.
- Sistemas Híbridos: La combinación de dos o más técnicas anteriores para mejorar la capacidad de resolución.

La IC se diferencia de la Inteligencia Artificial tradicional porque no requiere modelos matemáticos precisos y se adapta mejor a sistemas *incierto, no lineales y dinámicos*.

2.3.1. Aplicaciones de la IC

La Inteligencia Computacional tiene aplicaciones en áreas como la optimización de procesos, modelado bajo incertidumbre y toma de decisiones.

En cuanto a la gestión de operaciones y logísticas, Kennedy & Eberhart (1995), Du (2013) aplican *PSO* para la optimización de inventarios, rutas de transporte y planificación de la producción. La mayoría de los trabajos no integran simultáneamente decisiones de inventario, producción y precios bajo incertidumbre.

En cuanto a la optimización de decisiones financieras, Herrera et al. (1998) usan meta-heurísticas y lógica difusa para la optimización de carteras de inversión y predicción de mercados financieros.

En marketing y retención de clientes, estudios basados en modelos predictivos del churn orientados a *profit-driven* como *ProfLogit* Stripling et al. (2018), *ProfTree* Höppner et al. (2020), *ProfMPM* Maldonado et al. (2020), logran mayores ganancias esperadas. Estos trabajos optimizan campañas de forma estática o dinámica, sin introducir explícitamente una relación proporcional y funcional dinámica entre incentivos y aceptación.

En cuanto a modelos predictivos y control en procesos industriales, Passino (1998); Wang (1996) implementan sistemas híbridos (*PSO* + lógica difusa) para controlar procesos industriales en tiempo real.

Para la optimización en redes y telecomunicaciones, Engelbrecht (2006) usan *PSO* para optimizar la asignación de recursos en redes inalámbricas y la planificación de frecuencias.

2.3.2. Análisis comparativo de modelos previos y modelos propuestos

A continuación, se presenta una comparación analítica y explícita entre los modelos existentes y los modelos propuestos en la investigación, considerando de manera diferenciada las dos principales contribuciones.

Primera contribución: Integración de lot-sizing, logit restringido, pricing y PSO

Aspecto	Modelos Previos	Modelo Propuesto
Lot-sizing con demanda estocástica	La mayoría de los modelos tradicionales (e.g., PL, PNL) asumen demanda determinista, ignorando la incertidumbre.	El modelo propuesto considera demanda probabilística mediante la integración del modelo CMNL.
Estrategias de pricing	Modelos previos tratan precios de forma estática o como un parámetro externo.	Las decisiones de pricing se optimizan simultáneamente con inventarios y producción.
Restricciones endógenas	El modelo logit multinomial estándar (MNL) no maneja restricciones en capacidad o costos de producción.	Se extiende a CMNL (logit restringido), incorporando restricciones mediante penalizaciones suaves.
Metaheurísticas	Algunos modelos utilizan heurísticas tradicionales (e.g., GA, SA), que pueden estancarse en mínimos locales.	El uso de PSO garantiza exploración global del espacio de soluciones, resolviendo problemas no lineales complejos.

Cuadro 2.2: Problemas no resueltos por los modelos existentes en la primera contribución

Estudio previo	Limitaciones	Aporte del modelo propuesto
Zambrano-Rey et al. (2019)	Se enfoca en lot-sizing y precios, pero asume demanda determinista y carece de restricciones endógenas.	Introduce demanda probabilística y restricciones endógenas usando CMNL y PSO simultáneamente.
López-Ospina et al. (2020)	Maneja restricciones endógenas en problemas de transporte, pero no considera simultáneamente decisiones de pricing.	Optimización conjunta de pricing, almacenamiento y producción en un entorno con incertidumbre.
Martínez et al. (2016)	Utiliza métodos exactos para problemas simples, pero tiene escalabilidad limitada.	El PSO permite resolver problemas de alta dimensionalidad de manera eficiente.

Cuadro 2.3: Comparación con trabajos específicos en la primera contribución

Segunda contribución: Optimización del profit en retención de clientes con FIS tipo Mamdani

Aspecto	Modelos Previos	Modelo Propuesto
Enfoque determinista vs. probabilístico	Modelos como ProfLogit y ProfTree optimizan el profit, pero no consideran incertidumbre explícita en las relaciones.	El modelo propuesto optimiza el profit con lógica difusa y relaciona explícitamente γ y δ .
Categorización de clientes	Métodos como clasificación binaria o árboles no capturan interacciones complejas entre variables.	Utiliza un Sistema de Inferencia Difusa (FIS) tipo Mamdani, permitiendo segmentación precisa de clientes.
Relación entre γ y δ	Modelos tradicionales tratan γ y δ como parámetros independientes.	Se propone una relación funcional $\gamma = h(\delta)$, introduciendo una optimización dinámica de incentivos.

Cuadro 2.4: Problemas no resueltos por los modelos existentes en la segunda contribución

Estudio previo	Limitaciones	Aporte del modelo propuesto
ProfLogit	Optimiza el profit, pero no establece una relación entre γ y δ .	Relación explícita y dinámica: $\gamma = h(\delta)$.
ProfTree	Modelos basados en árboles que no consideran incertidumbre ni optimización difusa.	Introducción de lógica difusa (FIS Mamdani) para capturar incertidumbre y segmentación avanzada.
ProfMPM	Optimización estática de incentivos sin ajustes dinámicos.	Optimización dinámica de incentivos, adaptada al comportamiento de los clientes.

Cuadro 2.5: Comparación con trabajos específicos en la segunda contribución

2.3.3. Valor Original de la Investigación

Si bien *PSO* y *FIS tipo Mamdani* son modelos conocidos, el valor original de la investigación radica en aspectos relevantes como: (1) Integración de técnicas: La integración de sistemas de inferencia difusa, técnicas de optimización heurística y modelos probabilísticos constituyen contribuciones novedosas, que no han sido exploradas en la literatura. (2) Resolución de problemas reales: Se abordan problemas aplicados complejos (gestión de operaciones y retención de clientes) que no han sido resueltos por modelos tradicionales. (3) Aplicación innovadora: Por una parte, el uso de *PSO* para optimizar simultáneamente decisiones complejas (*pricing*, inventarios y producción) en un entorno con incertidumbre, y por otra parte, la aplicación de *FIS Mamdani* para capturar las interacciones complejas entre variables mediante un sistema de inferencia difusa tipo Mamdani y luego optimizar las campañas de retención de forma *profit-driven*, integrando dinámicamente γ y δ .

Capítulo 3

Metodología

Hoy en día las empresas tienen una necesidad específica que satisfacer que no está siendo provista por las arquitecturas o metodologías actuales. Con esta investigación se propone atacar las necesidades insatisfechas bajo el esquema actual con las herramientas de tono estratégico y táctico.

La investigación se centra inicialmente en la optimización de la gestión de productos sustitutos, aplicando una perspectiva dinámica al modelo de (Pérez et al., 2016), abordando decisiones de almacenamiento, producción y precios en entornos dinámicos con restricciones de producción, mientras se considera la demanda sensible a las características del mercado. El modelo aborda la demanda no fija y probabilística, a diferencia de los modelos tradicionales que asumen una demanda determinista. Esto añade complejidad y permite una representación más realista de las decisiones de los consumidores. Por otra parte, estamos realizando varios planteamientos nuevos con un marco novedoso en la cual tenemos una función que es $\beta(\tau)$, que nos va a permitir encontrar el τ^* (umbral de corte óptimo). Las metodologías que actualmente uno pudiera utilizar, por ejemplo, como una de tipo Machine Learning, no hacen factible poder encontrar un τ^* . La función en la forma como la estamos planteando, en consideración a que adentro de esos clasificadores hay agentes o funciones que hacen complejo encontrar ese punto, a menos que sean en forma numérica. Lo que estamos proponiendo es proporcionar una ventaja de tono explicativo y algebraico para tener una expresión explícita para τ^* .

En esta segunda etapa, la temática relacionada a Mamdani (Geramian & Abraham, 2021) está en el estado del arte. En cuanto a (Neslin et al., 2006), también se encuentra en el estado del arte con las últimas publicaciones de (Verbraken et al., 2012; Óskars-

dóttir et al., 2018; Maldonado et al., 2021), y se está haciendo una extensión a través de una unión valiosa entre Mamdani y Neslin; pero que no es una fusión cualquiera, debido a que hay una expresión explícita para calcular el $\beta(\tau)$ con muy pocas herramientas, simplificada, con muy pocos datos y con bajo requerimiento de cómputo para el procesamiento de la información. Entonces, esta es una solución factible de implementar.

El diseño de campañas de retención de clientes tiene dos etapas metodológicas enlazadas: La primera es la elaboración de un método de inferencia difusa tipo Mamdani (Geramian & Abraham, 2021) que permita analizar cuán propensos a abandonar la compañía son los clientes (churners), lo que se realiza a través del análisis de los factores de entrada que son: valor de compra (V), frecuencia de compra (F) y lealtad (L) de los clientes, para determinar un valor numérico (D) para cada cliente y realizar una categorización de ellos. Este valor sirve para ordenar a los clientes y conocer cuál de ellos tiene mayor o menor tendencia a dejar de ser clientes y cambiar de empresa, y poder definir a cuáles de ellos se debe aplicar o no la campaña.

El valor (D) se obtiene de la desfuzzificación de las tres variables de entradas difusas (V, F y L) antes mencionadas, con sus correspondientes funciones de pertenencia y grados de membresía. Cada cliente i tendrá un valor V_i , F_i y L_i con los que se calcula su correspondiente D_i , lo que permite determinar un orden en los valores de D_i para saber si un D_i es más alto que otro y, entonces estará del lado de los clientes no-churners. En caso contrario, un D_i más bajo estará del lado de los clientes churners.

La segunda etapa corresponde a la definición de un modelo, con base en los conceptos de (Neslin et al., 2006), en el cual se asimila el abandono de los clientes con un umbral de decisión τ el cual se propone estimar a modo de maximizar la utilidad de la campaña, en un contexto que se conocen los retornos marginales por cada cliente, en los que forman parte el ingreso por cliente, como también los costos en los que se incurren por concepto de la campaña.

A continuación, exponemos en subsecciones separadas la metodología para cada uno de los modelos propuestos.

3.1. Integración de modelos de elección discreta con estrategias de inventario y fijación de precios

(Pérez et al., 2016) desarrollaron un modelo para optimizar la composición y el precio de paquetes dirigidos a un segmento de clientes, maximizando la utilidad de la firma mediante un enfoque de demanda estocástica y un modelo multinomial restringido. Evaluaron los bundles en el mercado para estimar la probabilidad de consumo.

El presente estudio revisa este modelo, incorporando un enfoque dinámico para mejorar la representación realista. Se centra en el comportamiento del consumidor frente a dos bienes sustitutos en diversos contextos económicos y determina las cantidades de producción, almacenamiento y precios óptimos para maximizar la rentabilidad. Se emplea un modelo logit multinomial restringido (CMNL) con demanda estocástica y preferencias heterogéneas del segmento, aplicando restricciones suavizadas relacionadas con el atractivo del producto y la disponibilidad.

3.1.1. Enfoque matemático

Se implementa un enfoque dinámico al modelo de (Pérez et al., 2016), aplicando políticas de *lot-sizing* que incorporan costos de producción, almacenamiento y restricciones de flujo intertemporal.

Parámetros

En primer lugar, se define un horizonte temporal de $t \in T$ períodos y se analizan $i \in I$ productos.

Por lo tanto, se especifican los costos asociados a cada producto. El término C_{it} representa el costo de producción del producto $i \in I$ en el período $t \in T$, mientras que H_{it} denota el costo de almacenamiento del producto $i \in I$ en el mismo período. Además, se establecen las capacidades máximas de producción y almacenamiento, denotadas por m_{Cap} y k_{Cap} , respectivamente.

Adicionalmente, I_{it} refleja el atractivo del producto $i \in I$ en el período $t \in T$. En contraste, β representa el parámetro de sensibilidad o penalización del grupo de estudio frente al precio del producto. Además, M_t indica el número de individuos en el segmento

de clientes durante el período $t \in T$. También se incluye V_0 como la utilidad asociada con la opción de no-compra.

Respecto a los parámetros necesarios para aplicar las restricciones suavizadas, se consideran $\omega_{Stock,i}$ y $\omega_{Prod,i}$ para $i \in I$, que son los parámetros logit vinculados a las restricciones de cantidad almacenada y producida, respectivamente. Estos parámetros calibran la influencia de cada restricción en el problema de optimización. Por otro lado, η_{Stock} y η_{Prod} indican la fracción de individuos que transgreden las restricciones de almacenamiento y producción, respectivamente.

Variables de decisión

Se especifican las variables necesarias para la formulación del modelo de investigación que representa una empresa que maximiza el beneficio total:

- P_{it} define el precio del producto $i \in I$ en el período $t \in T$.
- S_{it} representa la cantidad almacenada del producto $i \in I$ durante el período $t \in T$ (inventario).
- X_{it} corresponde a la cantidad producida del producto $i \in I$ en el mismo período $t \in T$.

Modelo matemático

La demanda es modelada con un modelo de elección discreta multinomial en el que los consumidores perciben una utilidad V_{it} para obtener un producto, dada por ecuación (3.1):

$$V_{it}(P_{it}) = I_{it} - \beta \cdot P_{it} \quad (3.1)$$

donde, β es la utilidad marginal de la renta del consumidor, P_{it} es el precio del producto i en el período $t \in T$, e I_{it} es el atractivo del producto. El atractivo I_{it} representa el valor percibido de un producto, basado en la valoración que los consumidores hacen de sus atributos o características (como calidad, diseño, marca). Es una medida de cuán deseable o interesante resulta el producto o servicio para el mercado objetivo en comparación con otras alternativas disponibles.

En un contexto de logit multinomial (MNL), si hay M_t consumidores en el mercado en el período $t \in T$ y si V_0 es la utilidad asociada con la opción de no-compra, entonces la demanda D_{it} se puede expresar en función de los precios $\vec{P}_t$ y las utilidades asociadas mediante la ecuación (3.2), que representa la probabilidad logit de adquirir el producto $i \in I$ multiplicada por el tamaño del mercado M_t :

$$D_{it}(P_{1t}, \dots, P_{It}) = D_{it}(\vec{P}_t) = M_t \cdot \frac{e^{V_{it}(P_{it})}}{V_0 + \sum_{k=1}^I e^{V_{kt}(P_{kt})}} \quad (3.2)$$

Las restricciones suaves dentro del MNL se representan mediante límites, que se expresan en forma de funciones 'S', como se muestra en las ecuaciones (3.3) y (3.4):

$$\phi_{\text{Prod},it} = \frac{1}{1 + e^{\omega_{\text{Prod},i}(X_{it} - m_{\text{Cap}} - \rho_{\text{Prod},i})}} \quad (3.3)$$

$$\phi_{\text{Stock},it} = \frac{1}{1 + e^{\omega_{\text{Stock},i}(\sum_{i=1}^I S_{it} - k_{\text{Cap}} - \rho_{\text{Stock},i})}} \quad (3.4)$$

Donde m_{Cap} y k_{Cap} representan los niveles máximos de producción y almacenamiento, respectivamente. Los otros parámetros en estas funciones de corte son los parámetros de escala $\omega_{\text{Stock},i}$ y $\omega_{\text{Prod},i}$ que se corresponden con la cantidad almacenada y producida, respectivamente. Las proporciones de individuos que no cumplen con las restricciones de almacenamiento y producción están representadas por η_{Stock} y η_{Prod} , y se estiman mediante las ecuaciones (3.5) y (3.6), respectivamente.

$$\rho_{\text{Prod},i} = \frac{1}{\omega_{\text{Prod},i}} \cdot \ln \left(\frac{1 - \eta_{\text{Prod}}}{\eta_{\text{Prod}}} \right) \quad (3.5)$$

$$\rho_{\text{Stock},i} = \frac{1}{\omega_{\text{Stock},i}} \cdot \ln \left(\frac{1 - \eta_{\text{Stock}}}{\eta_{\text{Stock}}} \right) \quad (3.6)$$

Los puntos de corte (3.3) y (3.4) representan restricciones suaves para la producción y el almacenamiento. Estas restricciones tienen como objetivo garantizar que la cantidad producida no exceda la capacidad máxima y que el almacenamiento se mantenga dentro de los límites permitidos. En particular:

- La restricción de producción busca asegurar que la cantidad producida X_{it} no sobrepase el límite de capacidad máxima m_{Cap} para cada producto i en el período t . Esta

restricción se formaliza como:

$$X_{it} \leq m_{\text{Cap}} \quad \forall i, t$$

- La restricción de almacenamiento asegura que la cantidad almacenada no exceda el límite establecido, lo que se expresa como:

$$\sum_{i=1}^I S_{it} \leq k_{\text{Cap}} \quad \forall t$$

Donde $\sum_{i=1}^I S_{it}$ es la suma de las cantidades almacenadas de todos los productos en el período t y k_{Cap} es el límite de capacidad de almacenamiento.

Además, como se detalla en López-Ospina et al. (2021) y Pérez & López-Ospina (2022), el objetivo de las funciones suavizadas no es únicamente permitir la penalización de una alternativa en función de un atributo específico, sino también ilustrar el impacto que tiene la inclusión y valoración de restricciones endógenas sobre la función de utilidad de los consumidores. Estas restricciones endógenas reflejan el efecto de la escasez de productos en el mercado, modificando así la percepción de utilidad de los consumidores. Incluyendo estos límites, el modelo de elección discreta multinomial (MNL) se convierte en un MNL restringido (CMNL). La demanda D_{it} de la ecuación (3.2) se expresa ahora como se muestra en la ecuación (3.10). Todos los parámetros del modelo CMNL pueden ser estimados utilizando las metodologías descritas en Martínez et al. (2009) y Castro et al. (2013), que ofrecen directrices y enfoques para llevar a cabo estimaciones de máxima verosimilitud especializadas en el contexto de CMNL.

$$D_{it}(\vec{P}_t, \vec{X}_t, \vec{S}_t) = M_t \cdot \phi_{\text{Prod},it} \cdot \phi_{\text{Stock},it} \cdot \frac{e^{V_{it}}}{V_0 + \sum_{k=1}^I \phi_{\text{Prod},kt} \cdot \phi_{\text{Stock},kt} \cdot e^{V_{kt}}} \quad (3.7)$$

Si los costos de producción y almacenamiento son C_{it} y H_{it} respectivamente, el modelo completo se desarrolla en las siguientes expresiones:

$$\max \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^T \left(P_{it} \cdot D_{it}(\vec{P}_t, \vec{X}_t, \vec{S}_t) - C_{it} \cdot X_{it} - H_{it} \cdot S_{it} \right) \quad (3.8)$$

s.a.:

$$S_{it} = S_{it-1} + X_{it} - D_{it}(\vec{P}_t, \vec{X}_t, \vec{S}_t), \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.9)$$

$$D_{it}(\vec{P}_t, \vec{X}_t, \vec{S}_t) = M_t \cdot \phi_{\text{Prod},it} \cdot \phi_{\text{Stock},it} \cdot \frac{e^{V_{it}}}{V_0 + \sum_{k=1}^I \phi_{\text{Prod},kt} \cdot \phi_{\text{Stock},kt} \cdot e^{V_{kt}}} \quad (3.10)$$

Para incluir las restricciones que indican que los precios P_{it} , la cantidad producida X_{it} , y la cantidad almacenada S_{it} deben ser no negativos en todos los productos y períodos, utilizamos la siguiente notación:

$$P_{it}, X_{it}, S_{it} \geq 0, \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.11)$$

La función objetivo, expresada en la ecuación (3.8), representa la utilidad o el beneficio total obtenido, calculado como la diferencia entre los ingresos totales generados y los costos totales asociados a la producción y el almacenamiento. La ecuación (3.9) detalla el balance dinámico del inventario, considerando que el stock de períodos anteriores se transfiere para su uso en futuros períodos. En el período inicial, el inventario inicial S_{i0} de cada producto es conocido.

Es importante destacar que las restricciones se integran en el modelo de elección discreta mediante el uso de restricciones suaves. El modelo logit multinomial (MNL), presentado en la ecuación (3.10), asegura que la demanda de los consumidores para cada producto y período se determina de manera probabilística, teniendo en cuenta las restricciones exógenas impuestas sobre la probabilidad de compra. Esto implica que la demanda, entendida como la cantidad vendida, se ajusta en función de estas restricciones a través de las funciones de corte.

Planteamiento metodológico

En relación con la solución del problema descrito, se emplea el método de punto fijo para determinar el óptimo en términos de la cantidad almacenada. Este enfoque considera la cantidad producida, los precios previamente establecidos y la demanda observada para el período en análisis. Por consiguiente, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$S_{it} = S_{it-1} + X_{it} - D_{it}(S_{it}, X_{it}, P_{it}) \quad (3.12)$$

En la ecuación (3.12), S_{it} muestra recursividad, ya que su valor depende de sí mismo

para el cálculo de la demanda, que requiere conocer el almacenamiento de todos los productos. (López-Ospina et al., 2021), aborda la congestión mediante un punto fijo, dado que la demanda, al modelarse con CMNL, es implícitamente dependiente de su propio valor. La ecuación utilizada para determinar el valor del inventario es:

$$S_{\text{PRUEBA}it} = S_{it-1} + X_{it} - D_{it}(S_{it}, X_{it}, P_{it}) \quad (3.13)$$

En el estudio, se aplica el método de punto fijo para estimar el inventario de productos y se utiliza la optimización por enjambre de partículas (PSO) para la resolución del problema de optimización, el cual ha sido implementado en PythonTM. Se busca minimizar la diferencia entre el almacenamiento calculado mediante las ecuaciones y el estimado por PSO, al considerar la suma de los errores cuadráticos en los ítems producidos. Así, se emplea el algoritmo PSO para optimizar simultáneamente el inventario, la producción y el precio en el problema global.

En definitiva, el algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO) se utiliza específicamente para optimizar todo el modelo. La razón es que el modelo es no lineal y requiere un método capaz de manejar esta complejidad mediante modificaciones especialmente adaptadas. La heurística PSO se ajustó con un punto fijo para resolver el modelo. El objetivo no era contribuir al campo de la heurística, sino utilizar un método conocido que permitiera modificaciones, incluida la inclusión del punto fijo. Se descartaron los solucionadores tradicionales debido a la elevada no linealidad y a la imposibilidad de disponer de una expresión algebraica debido al punto fijo.

El algoritmo de solución integra dos metaheurísticas de tipo PSO: La primera metaheurística busca la solución global del problema, y la segunda pretende mantener la condición de equilibrio intertemporal en cada período y producto. Este enfoque permite calcular el almacenamiento óptimo utilizando restricciones de capacidad de corte y estimar la probabilidad de demanda en función de la utilidad de los productos. El algoritmo PSO logra la convergencia de forma eficaz, lo que lo convierte en una opción adecuada para nuestras necesidades de optimización. El algoritmo logra la convergencia para resolver ecuaciones de punto fijo (véase la Figura 3.1).

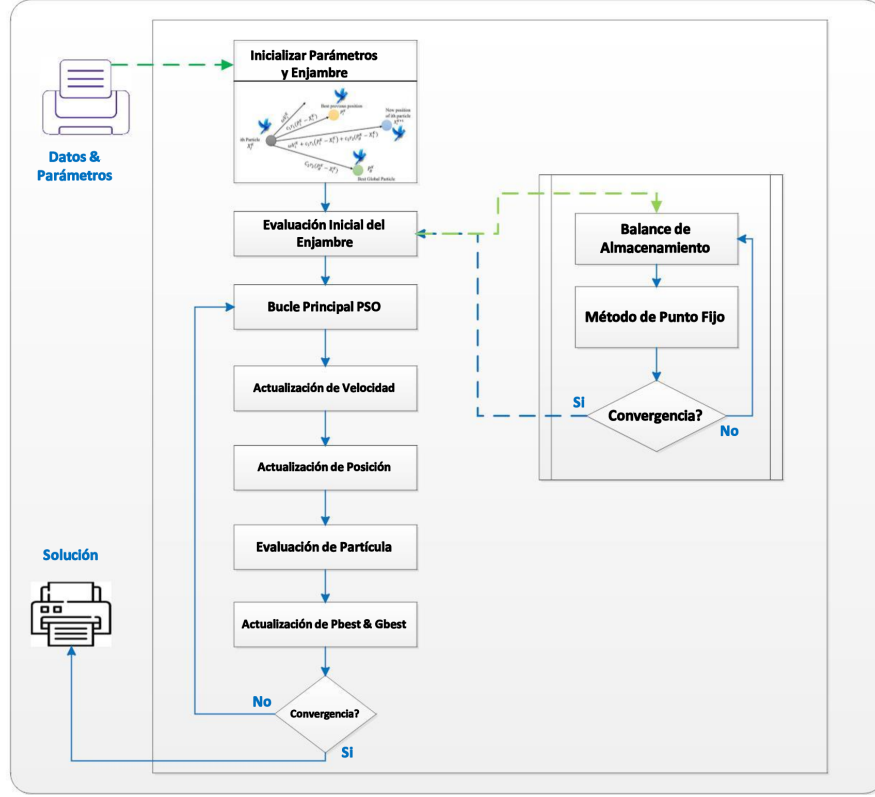


Figura 3.1: Descripción del método PSO modificado propuesto.

El uso de un sistema de punto fijo en cada período dentro del esquema PSO presenta desafíos específicos. Basada en el comportamiento observado en bandadas de pájaros, la PSO incorpora dinámicas grupales para influir en las decisiones individuales de las partículas. Para una comprensión detallada, consulte los trabajos de (Shiet al. , 2001), (Wang et al., 2023), (Kilichev & Kim, 2023), y (Zhang et al., 2023). El procedimiento PSO consiste en generar un enjambre de partículas, evaluarlas en función del objetivo y realizar actualizaciones iterativas en sus posiciones y velocidades.

$$FO_{\text{Fixed-point},t} = \sum_{i=1}^I (S_{it} - (S_{it-1} + X_{it} - D_{it}(S_{it}, X_{it}, P_{it})))^2 \quad (3.14)$$

La cantidad almacenada se determina utilizando ecuaciones de punto fijo para cada partícula, considerando producción y precios previamente conocidos. Este cálculo toma en cuenta la cantidad producida, los precios y la demanda del periodo actual. Por consiguiente, se plantea la restricción de equilibrio de inventario entre períodos (3.9), la cual es de naturaleza recursiva. Cabe destacar que la demanda también depende de

la producción, mientras que el valor de almacenamiento se basa en todos los productos disponibles. Por lo tanto, para obtener el conjunto completo de soluciones S_{it} , se debe resolver un problema de optimización en cada período. Para resolver (3.14), se puede emplear nuevamente el método PSO o cualquier otra biblioteca adecuada para la optimización numérica, dado que estos problemas internos son relativamente simples de resolver. Para cada solución evaluada en cada iteración k del PSO principal, es necesario encontrar una solución óptima para el flujo de inventario. Consulte la metodología interna en la Figura 3.2.

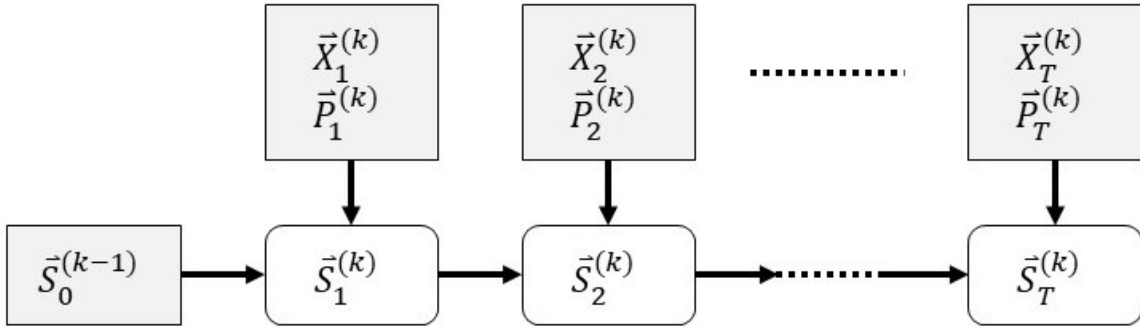


Figura 3.2: Explicación de la Optimización interna de PSO.

En este contexto, una vez que se obtiene una solución para la iteración k , se lleva a cabo una optimización por enjambre de partículas (PSO) estándar en cada etapa para abordar el problema.

Sea $\mathbf{Y}_m^{(k)}$ la matriz de variables de decisión para todo el problema en la iteración k para la partícula m (ecuación 3.15), dada por:

$$\mathbf{Y}_m^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{m1}^{(k)} & \dots & \mathbf{X}_{mT}^{(k)} \\ \mathbf{P}_{m1}^{(k)} & \dots & \mathbf{P}_{mT}^{(k)} \\ \mathbf{S}_{m1}^{(k)} & \dots & \mathbf{S}_{mT}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

A continuación, siguiendo el procedimiento clásico de PSO (véanse las ecuaciones 3.16 y 3.17), es posible optimizar el problema completo. Los detalles de los parámetros de PSO se presentan en el Apéndice A (sección A.1). La actualización de la matriz de variables de decisión para la iteración $k + 1$ se realiza de la siguiente manera:

$$\mathbf{Y}_m^{(k+1)} = \mathbf{Y}_m^{(k)} + \mathbf{Vel}_m^{(k)} \quad (3.16)$$

La actualización de la velocidad para la iteración $k + 1$ se calcula como:

$$\mathbf{Vel}_m^{(k+1)} = w\mathbf{Vel}_m^{(k)} + c_1r_1(\mathbf{P}_{\text{best}}^{(k)} - \mathbf{Y}^{(k)}) + c_2r_2(\mathbf{G}_{\text{best}}^{(k)} - \mathbf{Y}^{(k)}) \quad (3.17)$$

donde:

- $\mathbf{Vel}_m^{(k+1)}$ es el vector de velocidad actualizado en la iteración $k + 1$.
- $\mathbf{Vel}_m^{(k)}$ es el vector de velocidad de la partícula m en la iteración k .
- w es el factor de inercia, que controla la influencia de la velocidad anterior.
- c_1 y c_2 son los coeficientes de aceleración para las posiciones personal ($\mathbf{P}_{\text{best}}^{(k)}$) y global ($\mathbf{G}_{\text{best}}^{(k)}$), respectivamente.
- r_1 y r_2 son números aleatorios entre 0 y 1.
- $\mathbf{P}_{\text{best}}^{(k)}$ es la mejor posición conocida por la partícula en la iteración k .
- $\mathbf{G}_{\text{best}}^{(k)}$ es la mejor posición global conocida en la iteración k .
- $\mathbf{Y}^{(k)}$ es la matriz de variables de decisión en la iteración k .
- $\mathbf{Y}_m^{(k+1)}$ es la nueva posición de la partícula m en la iteración $k + 1$.

Experimentos computacionales

Se configuran diversos escenarios experimentales para evaluar la eficiencia del algoritmo desarrollado, contextualizando estos escenarios mediante la variación de los parámetros del modelo matemático (ver Apéndice A (sección A.2)). Inicialmente, se define un escenario base que refleja un mercado en el que los consumidores responden de manera estándar a los cambios en los precios y los productos son percibidos como equivalentes en atractivo. En este contexto, se examina la robustez y el rendimiento general de la herramienta.

En una segunda etapa, se establece el escenario 1, donde se realiza el análisis de la sustitución mediante la restricción de productos más atractivos a través de ajustes en los costos y las capacidades. Se parametrizan entornos de mercado con alta y baja sensibilidad a variaciones en los precios. Finalmente, se define el escenario 2, con la limitación

de un producto más atractivo mediante parámetros CMNL, considerando un mercado de grandes segmentos de clientes y baja utilidad de no-compra. En estos contextos, se induce escasez ajustando costos, capacidades o variaciones en los parámetros del modelo de elección multinomial restringido (CMNL), en un entorno donde un producto se presenta como significativamente más atractivo que el alternativo. Posteriormente, para cada escenario, se identifican las decisiones óptimas que una empresa debe tomar y las utilidades derivadas de dichas decisiones.

Para modelar los mercados, se ajustan los parámetros de sensibilidad al precio y la utilidad asociada a la opción de no-compra. En términos de sensibilidad al precio, se establecen tres categorías que reflejan la variación en la respuesta del consumidor ante cambios en los precios. En cuanto a la utilidad de no-compra, se reduce en escenarios que implican una mayor necesidad de adquisición. A partir de estas variaciones, se calculan las demandas en cada caso de estudio y, a continuación, se determinan los óptimos de almacenamiento, producción y precios.

3.2. Diseño de campañas de retención de clientes

El diseño de campañas de retención de clientes tiene dos etapas metodológicas enlazadas: la predicción para lograr la categorización de clientes a través de Mamdani FIS y el profit-driven basado en los beneficios para captar clientes. Asimismo, considera un análisis prescriptivo.

3.2.1. El enfoque de la predicción

Consideremos una Clasificación Tridimensional de Clientes (TDCC) (Madzík & Shahin, 2020), inspirada en el Análisis Modal de Fallos y Efectos tradicional (FMEA), que evalúa los fallos potenciales antes de que afecten al cliente (Liu et al., 2013). En el FMEA tradicional, el riesgo se prioriza utilizando el Número de Prioridad de Riesgo (Risk Priority Number, RPN por sus siglas en inglés), calculado como $RPN = S \times O \times D$ (Qin et al., 2020). Aquí, S , O , y D representan tres factores de riesgo: la gravedad del efecto del fallo (failure effect severity, S), la ocurrencia de fallos (failure occurrence, O) y la probabilidad de que el fallo no se detecte (probability of failure non detection), respectivamente.

(Madzik & Shahin, 2020) propusieron priorizar y clasificar a los clientes de nuevo, a través de una formula de multiplicación como se muestra en la Ecuación (3.18).

$$LPN = V \times F \times L, \quad (3.18)$$

donde V es el valor de compra del cliente, F es la frecuencia de compra del cliente, y L es la fidelidad del cliente. Estas son las tres dimensiones, cada una con el dominio $[1, 10]$, y LPN es una función de ellas, con el rango $[1, 10]$.

Podemos mejorar este sencillo enfoque de multiplicación introduciendo un sistema de inferencia difusa (Fuzzy Inference System, FIS) como entrada múltiple y salida única (Multiple Input Single Output, MISO), también conocido como FIS de Mamdani. Los sistemas MISO generan una única salida a partir de múltiples entradas y son particularmente útiles para mapear relaciones inciertas entre entradas y salida, como se ve en el FMEA (Geramian et al., 2017).

El desarrollo del método de inferencia difusa de tipo Mamdani (Geramian & Abraham, 2021) analiza la propensión de los clientes a la rotación. Factores como el valor de compra (V), la frecuencia de compra (F), y la fidelidad (L) se evalúan para asignar a cada cliente un valor numérico D , que indica su propensión a la rotación o *churn*. Cuanto mayor sea el valor de D , mayor será la probabilidad de que el cliente abandone. Para cada cliente i con V_i , F_i , y L_i , el FIS nos permite calcular el correspondiente D_i . En consecuencia, surge un orden de clientes basado en los valores de D_i . Un D_i más alto coloca a un cliente más cerca del lado de los que abandonan (*churner*), mientras que un D_i más bajo lo coloca en el lado de los que no abandonan (*no-churner*). Esta categorización ayuda a determinar qué clientes tienen una mayor o menor propensión a abandonar la empresa, proporcionando insights sobre a quién dirigir las campañas de retención.

El procedimiento FIS de MISO Mamdani consta de cuatro etapas. A continuación se ofrece una breve descripción de cada etapa, seguido de los detalles matemáticos.

- (i) Etapa de Fuzzificación: Convierte los valores numéricos de las variables de entrada en variables lingüísticas difusas, asignando grados de pertenencia mediante funciones de pertenencia.
- (ii) Base de reglas difusas: Define reglas expertas que mapean la relación entre en-

tradas y salidas, utilizando un formato “si-entonces” para cada regla. Por ejemplo, con tres variables de entrada n_1 , n_2 , y n_3 y sus correspondientes funciones de pertenencia, el número total de reglas necesarias es $n_1 \times n_2 \times n_3$.

- (iii) Inferencia y Agregación difusa: Evalúa reglas con valores de entrada utilizando métodos de producto o mínimo y agrega los resultados utilizando métodos de máximo o suma.
- (iv) Etapa de Defuzzificación: Convierte las variables lingüísticas en valores numéricos utilizando métodos como la Bisectriz, el Centroide de Área, el Mayor de los Máximos (Largest of Maximum, LoM), el Medio de los Máximos (Middle of Maximum, MoM), y el Menor de los Máximos (Smallest of Maximum, SoM) para defuzzificar la salida agregada.

Etapas de Fuzzificación

Las variables de entrada, como el valor de compra (V), la frecuencia de compra (F), y la fidelidad (L), se convierten variables difusas mediante conjunto de funciones de pertenencia $\{bajo(l), medio(m), alto(h)\}$. Estos valores difusos se combinan para obtener un valor de potencial de abandono de clientes difuso o número de prioridad de lógica difusa (Fuzzy Logic Priority Number, FLPN) multiplicando las variables de entrada. Los vectores de entrada se presentan a continuación:

$$\vec{V} = \left\{ \begin{array}{c} \{V, [1, 10], l, m, h, \} \\ \{\mu_l(V), \mu_m(V), \mu_h(V)\} \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

$$\vec{F} = \left\{ \begin{array}{c} \{F, [1, 10], l, m, h, \} \\ \{\mu_l(F), \mu_m(F), \mu_h(F)\} \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

$$\vec{L} = \left\{ \begin{array}{c} \{L, [1, 10], l, m, h, \} \\ \{\mu_l(L), \mu_m(L), \mu_h(L)\} \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

Donde V , F , y L están en el rango $[1, 10]$, y LPN (3.18) es una función de ellos, con un rango $[1, 10]$. Para simplificar, todas estas variables de entrada se diseñan utilizando el mismo conjunto de funciones de pertenencia, $\{L, M, H\}$, con los elementos que representan $\{low, medium, high\}$, respectivamente. Los grados de pertenencia correspondientes son $\{\mu_l(k), \mu_m(k), \mu_h(k)\}$ para valores $k \in \{V, F, L\}$ y son números reales

dentro de $[0, 1]$. De forma similar a los valores LPN, cuanto mayor sea el valor FLPN difuso de salida, más probabilidad de que el cliente abandone (*churn*).

Base de reglas difusas

Considerando los tres factores V , F , y L , cada uno con tres funciones de pertenencia $\{l, m, h\}$, la base de reglas consta de $27 = 3 \times 3 \times 3$ reglas. Nuestro enfoque combina los componentes utilizando las condiciones “mínimo” y “y”. Por lo tanto, el vector del número de prioridad de lógica difusa (Fuzzy Logic Priority Number, FLPN) es:

$$\overrightarrow{FLPN} = \left\{ \begin{array}{c} \{FLPN, [0, 1], \{no - churner, churner\}\} \\ \{\mu_{no-churner}(lpn), \mu_{churner}(lpn)\} \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

Donde FLPN cambia en el rango $[0, 1]$ (a pesar de que algunos autores utilizan $[1, 100]$), representando las funciones de pertenencia para *no-churner* y *churner*. Los grados de pertenencia correspondientes, $\{\mu_{no-churner}(lpn), \mu_{churner}(lpn)\}$ para el valor lpn , son números reales dentro de $[0, 1]$.

Inferencia y agregación difusas

Las reglas de inferencia definidas se alimentan con las entradas y se evalúan utilizando el método de implicación mínima (AND). A continuación, los valores de las funciones de pertenencia de todas las reglas se agregan utilizando el operador máximo.

Defuzzificación

El valor de salida difuso FLPN se convierte en un valor nítido D mediante el método del centro del área (Center of Area, CoA). Este valor D clasifica a los clientes y predice si se darán de baja (*churn*). Por lo tanto, D es la defuzzificación del FLPN en (3.23), dado que las funciones de pertenencia de FLPN, es decir, D , deben representar clases de clientes, que se definieron utilizando las categorías de no abandono (*no-churner*) y abandono (*churner*), respectivamente, para mantener la naturaleza difusa de MISO Mamdani FIS. La ecuación (3.22) muestra la salida difusa de FLPN, donde las variables de entrada y salida se diseñan utilizando las funciones de pertenencia de la forma triangular como se configurarán en el modelo computational. Estas funciones de membresía describen la pertenencia de un cliente a las categorías de *churner* y *no-churner*:

$\mu_{FLPN}^{churner}$ mide el grado de pertenencia de un cliente al grupo de *churners* basado en su valor defuzzificado " D_Defuz ".

$\mu_{FLPN}^{(no-churner)}$ mide el grado de pertenencia de un cliente al grupo de *no-churner* basado en

su valor defuzzificado " D_Defuz ". Matemáticamente, estas se definen por las funciones de pertenencia triangulares establecidas en el código.

$$D = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{FLPN}(y) y dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{FLPN}(y) dy} \quad (3.23)$$

donde y es la variable agregada de las funciones de pertenencia.

En resumen, D es el valor certero defuzzificado, que resulta de evaluar cada elemento D (Defuzzificación del FLPN) del universo de salida ponderado por su pertenencia en el conjunto de salida FLPN. Es esperable que la implementación de éste detecte un valor numérico D para cada cliente y ordenarlos para obtener una categoría y así aumentar la rigidez del método Mamdani difuso. De manera que D nos permita además de obtener la categorización de los clientes, poder predecir si el cliente es *churn* o no.

3.2.2. Un enfoque basado en los beneficios (profit-driven) para la captación de clientes

Se presenta la ecuación de beneficios para una empresa utilizando las directrices de Neslin et al. (2006) para comparar clasificadores; este enfoque aborda explícitamente el efecto producido por una campaña de retención. La segmentación de los consumidores se realiza con $\tau \in [0, 1]$ como el umbral, refiriéndose a una probabilidad en la forma propuesta por (Verbraken et al., 2012), (Óskarsdóttir et al., 2018), y (Maldonado et al., 2021). En nuestro caso, que se trata de un FIS tipo Mamdani, utilizamos el número defuzzificado a partir de las funciones de pertenencia de los *no-churners* y *churners*, aplicando la campaña si $D > \tau$.

Para definir nuestro modelo, consideremos los siguientes parámetros y variables: N es el número total de consumidores, α es la fracción de consumidores que se busca apuntar con la campaña, β es la fracción de consumidores en el target que pueden ser churners, δ es el costo del incentivo para cada cliente, c es el costo de contactar con un cliente para ofrecerle el incentivo, γ es la tasa de éxito del incentivo (es decir, la proporción de clientes que siendo contactados que aceptan la campaña), CLV_i es el valor de por vida (es decir, el valor para la empresa si se retiene al cliente) para el cliente $i \in \{1, \dots, N\}$,

A es el costo administrativo total fijo de la ejecución de la campaña, y τ es una variable de decisión que representa el umbral para el cual se define aplicar la campaña. Para el cliente i , si $D_i > \tau$, se aplica la campaña. Dado que:

$$\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{D_i > \tau\}} \quad (3.24)$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot N$ es el número total de clientes de la campaña. Esto implica que:

$$\mathbb{1}_{\{D_i > \tau\}} = \begin{cases} 1, & \text{si cliente } i \text{ tiene } D_i > \tau \text{ (es decir, prioridad alta)} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.25)$$

Entonces, la expresión para el beneficio (*profit*) total es:

$$\Pi(\tau) = -A + \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{D_i > \tau\}} \underbrace{[\beta\gamma(CLV_i - c - \delta) + \beta(1 - \gamma)(-c) + (1 - \beta)(-c - \delta)]}_{W_i} \quad (3.26)$$

En (3.26), el término $\beta\gamma(CLV_i - c - \delta)$ representa la contribución al beneficio de la fracción $\beta\gamma$ de clientes contactados que son potenciales *churners* y deciden quedarse debido al incentivo. El término $\beta(1 - \gamma)(-c)$ representa el costo de contactar con la fracción $\beta(1 - \gamma)$ de clientes potenciales *churners* que no aceptan la oferta y abandonan (*churn*) a pesar de que se les ha ofrecido la campaña. El término $(1 - \beta)(-c - \delta)$ representa el costo en que se incurre por la fracción $(1 - \beta)$ de clientes contactados que no son *churners* potenciales pero aceptan la oferta. Con un poco de álgebra, podemos reducir la suma de estos términos en (3.26), obteniendo el término en (3.27).

$$W_i = \beta[\gamma(CLV_i) + \delta(1 - \gamma)] - (c + \delta) \quad (3.27)$$

Como se ha mencionado, β es la fracción de consumidores en el target que pueden ser *churners*. Según las definiciones de otros autores (Verbraken et al., 2012; Óskarsdóttir et al., 2018; Maldonado et al., 2021), esta fracción suele venir determinada por el cociente o el ratio de las funciones de distribución de probabilidad del clasificador. En nuestro caso, necesitamos ajustar esta definición para adaptarla al esquema FIS de tipo Mamdani. Así, definimos β para cada cliente como β_i una función de τ según la

ecuación (3.28).

$$\beta_i = \beta_i(\tau) = \frac{\int_0^\tau \mu_{FLPN}^{churner}(z) dz}{\int_0^\tau \mu_{FLPN}^{churner}(z) dz + \int_0^\tau \mu_{FLPN}^{no-churner}(z) dz} \quad (3.28)$$

A continuación, se explicará de manera precisa el papel de esta ecuación en la optimización de las estrategias de retención y en la evaluación del beneficio total de una campaña y se describirá de manera más explícita el origen de los términos y variables presentes en la ecuación (3.28), estableciendo cómo se vinculan con los supuestos teóricos y las condiciones prácticas del modelo general. En efecto, esto es la base de una línea de investigación que se abre, puesto permite utilizar esquemas diferentes y más elaborados, pero considerando la misma idea base de mezclar targeting con incentivos que se expone en este trabajo:

La ecuación (3.28) juega un papel fundamental y forma parte del modelo de análisis para la optimización de estrategias de retención y evaluar el beneficio total de una campaña. Esta ecuación define el cociente $\beta_i(\tau)$, que representa la propensión ajustada de un cliente i a responder favorablemente (o no) a la campaña, en función de un umbral τ . Este valor ponderado permite evaluar la importancia de los clientes en términos de su riesgo de abandono (*churn*) frente a su potencial retención.

La ecuación comprende las funciones de pertenencia $(\mu_{churner}, \mu_{no-churner})$, las cuales representan el grado en que un cliente i pertenece a la categoría de “*churner*” o “*no-churner*”. Estas funciones son características de los modelos de lógica difusa, lo que permite manejar la incertidumbre en la clasificación del cliente. Además, se tiene una función de densidad $FLPN(Z)$ que modela la distribución de las características relevantes del cliente y pondera las propensiones o la contribución de los valores de pertenencia (μ) . Finalmente, se tiene el parámetro τ que actúa como el umbral para determinar el rango de valores a considerar y se interpreta como un límite superior para evaluar la propensión acumulada hasta cierto nivel.

Así, el numerador de la ecuación (3.28) captura la propensión acumulada de los clientes que se ajustan a las características de un *churner* y el denominador normaliza esta propensión acumulada considerando tanto *churners* como *no-churners*.

El resultado $\beta_i(\tau)$ es una métrica relativa que permite priorizar decisiones basadas en

la importancia o el impacto potencial de incluir al cliente i en la campaña.

En resumen, la fracción β suele venir determinada por el cociente o ratio de las funciones de distribución de probabilidad del clasificador, según las definiciones de otros autores. En nuestro caso, ajustamos esta definición adaptándola al esquema FIS Mamdani. De esta manera, definimos β para cada cliente como β_i una función de τ ; es decir, $\beta_i = \beta_i(\tau)$, según lo indicado en la ecuación (3.28).

τ es el límite superior de las integrales, la variable principal del modelo, el umbral hasta el cual se evalúa la integral. El umbral para el cual se define aplicar la campaña, que se aplica sobre el " D " y éste se obtiene del FIS Mamdani. Este umbral define el umbral de propensión aceptable para que un cliente sea incluido en las estrategias de retención. La fracción β que, en vez de determinarla mediante probabilidades, en nuestro caso se determina a través de un ratio de las funciones de pertenencia. De esta manera, se puede calcular hasta dónde llegar con el " D " y esos van a ser a los que se les considera en el *target*. Entonces, se tiene que agrupar hasta ese punto. Estimar cuántos de esos clientes se hará campaña del total de N consumidores se calcula con la ecuación (3.25), la función indicatriz.

Entonces, podemos reescribir el beneficio total de la campaña (*profit*) como en la ecuación (3.29)

$$\Pi(\tau) = -A + \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{D_i > \tau\}} [\beta_i(\tau) (\gamma CLV_i + \delta(1 - \gamma)) - (c + \delta)] \quad (3.29)$$

Finalmente, el problema, como planteamiento habitual (Neslin et al., 2006; Verbraken et al., 2012; Óskarsdóttir et al., 2018; Maldonado et al., 2021) queda en la ecuación (3.30)

$$\max_{\tau \in [0,1]} \Pi(\tau) \quad (3.30)$$

No obstante, el planteamiento de (3.30) solo se centra en los clientes más propensos a la rotación (*churners*). No hay ninguna relación entre γ y δ , ni ninguna optimización que implique estos términos. Por lo tanto, (3.30) representa un problema clásico de selección de clientes utilizando un esquema de predicción FIS de tipo Mamdani. Analicemos ahora cómo mejorar este modelo para hacerlo más general y optimizar la campaña.

3.2.3. El modelo de análisis prescriptivo

En primer lugar, analicemos las condiciones principales para que una campaña sea rentable. Los ingresos totales, menos los costos del incentivo (δ) y del contacto con los clientes (c), deben ser superiores o iguales al costo fijo total de la campaña (A), como se indica en (3.31).

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{D_i > \tau\}} [\beta_i(\tau)(\gamma CLV_i + \delta(1 - \gamma)) - (c + \delta)] \geq A \quad (3.31)$$

Supongamos ahora que se ha completado la focalización, lo que implica la existencia de un τ^* óptimo para (3.30). Económicamente, esto ocurre cuando identificamos al *último cliente* i^* que produce un beneficio marginal individual positivo para la empresa. En este punto se incluyen todos los clientes con beneficio marginal positivo hasta i^* . Matemáticamente, esta condición se cumple cuando se satisface la ecuación (3.32).

$$\beta_{i^*}(\tau^*) = \frac{(c + \delta)}{(\gamma CLV_{i^*} + \delta)(1 - \gamma)} \quad (3.32)$$

Introducimos dos ideas clave: En primer lugar, proponemos tratar δ como una variable de decisión para (3.30), redefiniendo el beneficio óptimo como $\max_{\{\tau, \delta\}} \Pi(\tau, \delta)$, ya que la empresa necesita diseñar una campaña más efectiva. En segundo lugar, sugerimos una nueva interpretación de γ . Mientras que Verbraken et al. (2012) considera γ como una variable aleatoria independiente de δ , proponemos que un aumento en δ debería aumentar en consecuencia la propensión a adoptar la campaña, expresada como $\gamma = h(\delta)$.

Es esperable que: (i) sin incentivo, no hay propensión a aceptar la campaña (es decir, $h(0) = 0$), (ii) a medida que aumenta el incentivo, la propensión a aceptar la campaña también aumenta (es decir, $h'(\delta) > 0$), y (iii) dado que γ es una proporción, ésta debe ser menor o igual a uno (es decir, $h(\delta) \leq 1$).

Además, el análisis realizado sobre $\beta_{i^*}(\tau^*)$ para el problema de focalización (targeting problem) (3.30) sigue siendo válido. Por lo tanto, podemos actualizar la condición en (3.33) de la siguiente manera:

$$\beta_{i^*}(\tau^*) = \frac{c + \delta^*}{h(\delta^*)CLV_{i^*} + \delta^*[1 - h(\delta^*)]} \quad (3.33)$$

La condición en (3.33) se basa en la optimización de τ (orientación al cliente). Un enfoque de condición de optimalidad de primer orden (la derivada) sería complejo porque la función objetivo que representa las ganancias de la campaña es discontinua en esa dimensión, específicamente en $\mathbb{1}_{D_i > \tau}$. Sin embargo, (3.33) ayuda al establecer una condición que puede interpretarse como la identificación del *último cliente* i^* con una ganancia positiva cuando es el objetivo de la campaña. Dado que $\delta \in \mathbb{R}_+$, es posible analizar una condición de optimalidad en la dimensión de δ . Por lo tanto, calculemos $\partial\Pi/\partial\delta$.

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\delta} = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{D_i > \tau\}} \left[\beta_i(\tau) \left(CLV_i \cdot \frac{\partial h(\delta)}{\partial\delta} + (1 - h(\delta)) - \delta \cdot \frac{\partial h(\delta)}{\partial\delta} \right) - 1 \right] \quad (3.34)$$

En (3.34), $\frac{\partial\Pi}{\partial\delta} = 0$, cuando $D_i \leq \tau^*$, entonces $\mathbb{1}_{\{D_i \leq \tau^*\}} = 0$; por lo tanto, la condición ya se cumple. Por el contrario, cuando $D_i > \tau^*$, entonces $\mathbb{1}_{\{D_i > \tau^*\}} = 1$. Definamos $\Omega = \{i \in \{1, \dots, N\} : D_i > \tau^*\}$ y $\overline{CLV} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i \in \Omega} CLV_i$, considerando un τ conocido. Ahora, podemos expresar la condición de optimalidad de primer orden $\frac{\partial\Pi}{\partial\delta} = 0$ en (3.34) como (3.35).

$$\overline{CLV} \frac{\partial h(\delta)}{\partial\delta} + 1 - h(\delta) - \delta \cdot \frac{\partial h(\delta)}{\partial\delta} = \frac{1}{\beta_{i^*}(\tau)} \quad (3.35)$$

Enunciando explícitamente la condición de optimalidad para τ , que implica identificar al cliente i^* que satisface la condición (3.33), podemos sustituir β^* en la ecuación (3.35). Esta condición será válida para δ^* y τ^* , correspondientes a i^* , como se muestra en (3.36).

$$(\overline{CLV} - \delta^*) \frac{\partial h(\delta^*)}{\partial\delta^*} + 1 - h(\delta^*) = \frac{h(\delta^*) CLV_{i^*} + \delta^* [1 - h(\delta^*)]}{c + \delta^*} \quad (3.36)$$

En este contexto, en el que existen numerosas alternativas de investigación, nos centraremos en el caso más simple, que supone una relación lineal entre γ y δ sin intercepto. Esto permitirá realizar un análisis descriptivo destinado a proponer líneas de investigación donde la propensión a aceptar la campaña sigue una curva en forma de "S", específicamente:

- (i) Analizamos en detalle y obtenemos resultados para todo el modelo cuando suponemos que $h(\delta) = K\delta$, donde $K > 0$ es una constante conocida.
- (ii) Analizamos brevemente el caso con $h(\delta) = \frac{1}{1 + \exp\{\omega(\delta_{\min} - \delta)\}}$, que representa un

límite o punto de corte en δ donde mayores incentivos aumentan la propensión. Esto implica una curva en forma de S con un punto de corte en $\delta_{\min}$. A medida que δ se vuelve significativamente menor que $\delta_{\min}$ (lo que indica menores incentivos), la propensión a aceptar la campaña se acerca a cero. Por el contrario, a medida que δ se vuelve mayor que $\delta_{\min}$, la propensión (probabilidad) de aceptar la campaña se acerca a uno.

Desarrollamos la expresión (3.36) para el caso en que $h(\delta^*) = K\delta^*$, y encontramos que es posible derivar una ecuación de segundo orden en δ^* . Esta ecuación se presenta en (3.37), y sus soluciones se proporcionan en (3.38).

$$-\delta^{*2}K + \delta^*K(\overline{CLV} - 2c - CLV_{i^*}) + c(K\overline{CLV} + 1) = 0 \quad (3.37)$$

$$\delta^* = \frac{\overline{CLV} - 2c - CLV_{i^*} \pm \sqrt{(\overline{CLV} - 2c - CLV_{i^*})^2 + \frac{4c(K\overline{CLV} + 1)}{K}}}{2} \quad (3.38)$$

Obsérvese que cuando el costo fijo por cliente $c \approx 0$, que es realista para las ofertas online, las soluciones son $\delta^* \approx 0$ y $\delta^* \approx \overline{CLV} - CLV_{i^*}$, siendo esta última la única solución válida. Recordemos que la relación entre δ^* y τ^* se establece a través de i^* .

Esto implica que existe una solución para el incentivo óptimo δ^* , que, junto con el objetivo óptimo τ^* , maximiza el beneficio obtenido de la campaña (*profit*). Este novedoso enfoque es factible con nuestra propuesta y no ha sido explorado previamente en la literatura. En la siguiente sección, se proporcionará una descripción detallada de un caso de estudio numérico de acceso público.

Para el caso en que $h(\delta) = \frac{1}{1 + \exp\{\omega(\delta_{\min} - \delta)\}}$, ya no es posible proceder algebraicamente, pero pueden aplicarse métodos numéricos. En concreto, considerando esta función de forma sigmoidea, la derivada $\frac{\partial h(\delta)}{\partial \delta}$ se simplifica considerablemente. Se vuelve factible obtener numéricamente δ^* de la expresión resultante en (3.39).

$$(\overline{CLV} - \delta^*)\omega h(\delta^*)(1 - h(\delta^*)) + 1 - h(\delta^*) = \frac{h(\delta^*)CLV_{i^*} + \delta^*[1 - h(\delta^*)]}{c + \delta^*} \quad (3.39)$$

Capítulo 4

Resultados y Análisis

En esta sección se muestran algunos resultados y sus respectivos análisis de los sets de experimentos realizados para los dos trabajos abordados en esta investigación: inicialmente, se aborda el problema de optimización de la utilidad del consumidor bajo restricciones de logit multinomial restringido (CMNL) con el objetivo de maximizar las ganancias de una empresa. El enfoque se basa en un modelo dinámico de tipo *lot-sizing*, que optimiza simultáneamente el precio, la cantidad producida y almacenada para maximizar la utilidad. El estudio también incluye el análisis de la demanda entre productos sustitutos dentro de una organización. Para ello, se implementa el algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) utilizando el software PythonTM. Específicamente, se utiliza PSO para determinar de manera óptima el precio y la cantidad de producción de cada producto, y para calcular el óptimo de almacenamiento mediante restricciones de capacidad y la evaluación de la probabilidad de demanda basada en la utilidad de los bienes. Este enfoque asegura la convergencia mediante el uso de ecuaciones de punto fijo. Finalmente, se definen varios escenarios de estudio para evaluar el desempeño del algoritmo, ajustando los parámetros del modelo matemático para analizar su funcionamiento en diferentes contextos.

El segundo trabajo, se centra en el diseño de campañas de retención de clientes utilizando modelos como el Fuzzy Inference System (FIS) del tipo Mamdani, enlazado con la definición de un modelo de optimización, con base en los conceptos de Scott Neslin, en el cual se asimila el abandono de los clientes con un umbral de decisión τ , el cual se propone estimar a modo de maximizar la utilidad de la campaña, en un contexto que se conocen los retornos marginales por cada cliente, en los que forman parte el ingreso

por cliente, como también los costos en los que se incurren por concepto de la campaña, ofrece una estructura precisa para identificar y dirigirse a los clientes con mayor propensión a abandonar, maximizando así el impacto de las estrategias de retención. Ambas temáticas presentan enfoques sólidos, novedosos y complementarios para abordar el desafío de la retención de clientes desde perspectivas diferentes pero igualmente relevantes, así como el análisis de sensibilidad realizado mediante la variación de ciertos parámetros de los modelos de optimización propuestos y el establecimiento de distintos escenarios que permitieron evaluar diferentes situaciones que soportan la toma de decisiones en las empresas.

4.1. Integración de modelos de elección discreta con estrategias de inventario y fijación de precios

Dado el modelo propuesto, el análisis y la comparación deben evaluar las siguientes características: 1. No linealidad y demanda probabilística: El modelo no lineal introduce una demanda probabilística, a diferencia de los enfoques deterministas tradicionales en *lot-sizing* e inventarios, incrementando su complejidad. 2. Efectos de sustitución: La función logit para representar los efectos de sustitución genera una estructura no algebraica, complicando su resolución con métodos convencionales. 3. Punto fijo: La inclusión del punto fijo requiere técnicas de solución especializadas, distintas de las empleadas en modelos tradicionales.

Debido a estas características únicas del modelo, es esencial implementar un enfoque de validación adecuado. En lugar de realizar una comparación directa con la literatura existente —considerando la novedad del modelo—, se establece un escenario de referencia donde los productos no presentan diferencias. A partir de este punto de partida simétrico y simplificado, se introducen variaciones para examinar las recomendaciones del modelo y simular la situación en la que los tomadores de decisiones deben ofrecer el producto o servicio más atractivo a los consumidores. Esta metodología permite resaltar las innovaciones y contribuciones del modelo, además de validar su aplicabilidad en contextos reales.

El propósito es analizar cómo el modelo propuesto gestiona la escasez y la sobreproducción cuando un producto tiene mayor atractivo para los consumidores que el alter-

nativo. Definimos escenarios variando valores de atractivo (I_{it}), capacidades máximas (k_{cap} , m_{cap}), costos (C_{it} y H_{it}), sensibilidad al precio (β), tamaño del mercado (M_t) y utilidad de no-compra (V_0). Probamos el modelo en un horizonte temporal de cinco periodos ($n_T = 5$) y para dos productos sustitutos ($n_{\text{PROD}} = 2$). Presentamos los valores obtenidos para el valor de la función objetivo, precios (P_{it}) y cantidades producidas (X_{it}) y almacenadas (S_{it}). Adicionalmente, presentamos los valores de demanda para los casos descritos y los respectivos gráficos de convergencia para las heurísticas PSO. Este estudio implementa un horizonte temporal de cinco periodos y considera dos productos sustitutos, buscando un equilibrio óptimo entre la complejidad del modelo y la claridad en aspectos clave: Primero, la limitación a dos productos sustitutos permite captar de manera precisa los efectos de sustitución y las preferencias del consumidor, manteniendo controlada la complejidad computacional y permitiendo un análisis más enfocado. Segundo, el uso de un horizonte temporal de cinco periodos proporciona un marco adecuado para evaluar la adaptabilidad dinámica del modelo a variaciones en las condiciones del mercado, logrando representar los conceptos fundamentales de manera efectiva sin introducir complejidades innecesarias, lo cual es relevante para su aplicación en escenarios prácticos con información de demanda y disponibilidad actualizada.

4.1.1. Escenario base

Para validar el modelo, se compara con un escenario de referencia que asume condiciones homogéneas entre productos. Este entorno inicial permite evaluar el impacto de atributos diferenciadores y variaciones en disponibilidad. La comparación en este contexto controlado demuestra la robustez y adaptabilidad del modelo, ofreciendo perspectivas sobre su aplicabilidad en decisiones de inventario y precios para productos sustitutos con restricciones flexibles de suministro.

El Cuadro 4.1 muestra un escenario donde se consideran dos productos con idéntico nivel de atractivo, detallando simultáneamente los costos asociados y las capacidades disponibles. Se observa que los costos de almacenamiento presentan una tendencia decreciente a lo largo del tiempo, esto obedece a que se modela que el consumidor presenta más placer al adquirir el bien en el presente que en un futuro. Además, se presentan las capacidades máximas, que son equivalentes para ambos productos. Por otro lado, el Cuadro 4.2 proporciona parámetros CMNL que consideran un mercado de 10 clien-

tes, los cuales presentan una sensibilidad al precio estándar, modelando un mercado de estudio de bienes normales.

Parámetro	Producto	1	2	3	4	5
Atractivo (I_{it})	1 y 2	4,00	3,50	3,00	2,50	2,00
Costos de producción (C_{it})	1 y 2	3,00	2,75	2,50	2,25	2,00
Costos de almacenamiento (H_{it})	1 y 2	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
Capacidad de almacenamiento (k_{cap})	1 y 2	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
Capacidad de Producción (m_{cap})	1 y 2	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00

Cuadro 4.1: Parámetros de la hipótesis de base.

Parámetros CMNL	Valor
Tamaño del mercado (M_t)	10,00
Utilidad de no-compra (V_0)	4,00
Sensibilidad al precio (β)	0,10

Cuadro 4.2: Parámetros CMNL para el escenario de referencia.

Dado que se han definido parámetros de caracterización idénticos para ambos productos, se espera que estos generen utilidades similares y que la demanda se exprese en unidades equivalentes. Adicionalmente, se prevé que el precio establecido muestre una variación mínima entre los productos.

El cuadro 4.3 muestra una estabilidad en la utilidad total de la empresa a lo largo de las tres pruebas realizadas para evaluar la metodología en el escenario de referencia, con una distribución equitativa entre los productos, lo que concuerda con las expectativas teóricas.

Función de utilidad de la empresa			
	U_{Total}	$U_{Producto1}$	$U_{Producto2}$
Prueba 1	84,529	42,122	42,407
Prueba 2	82,663	41,592	41,072
Prueba 3	82,225	40,408	41,817

Cuadro 4.3: Función objetivo de utilidad – Escenario base

Además, el cuadro 4.4 muestra el beneficio y las desviaciones porcentuales respecto al promedio. El cuadro 4.5 presenta la función objetivo para los problemas internos de

cada periodo, que reflejan el cálculo de la ecuación de punto fijo en (3.14). Un error cercano a cero indica una mayor precisión de la solución del algoritmo PSO.

Función objetivo y desviaciones	
	Total
Media	83,14
Prueba 1	1,67 %
Prueba 2	-0,57 %
Prueba 3	-1,10 %

Cuadro 4.4: Función objetivo - beneficio de la empresa y desviaciones de la media para tres pruebas.

Valores de la función objetivo para los problemas internos					
Pruebas	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
1	$1,718 \times 10^{-5}$	$1,542 \times 10^{-6}$	$1,245 \times 10^{-6}$	$5,449 \times 10^{-5}$	$1,100 \times 10^{-6}$
2	$1,055 \times 10^{-3}$	$1,163 \times 10^{-3}$	$1,124 \times 10^{-5}$	$1,114 \times 10^{-5}$	$1,144 \times 10^{-6}$
3	$7,114 \times 10^{-5}$	$3,207 \times 10^{-5}$	$7,081 \times 10^{-5}$	$5,224 \times 10^{-5}$	$8,536 \times 10^{-5}$

Cuadro 4.5: Valor de la función objetivo para tres pruebas y cada período: cuanto más se acerque a cero, menor será el error.

En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3, se muestran las curvas de convergencia para las tres pruebas de PSO del problema principal, a la izquierda y a la derecha, se muestra la convergencia para el PSO interno para encontrar valores de almacenamiento.

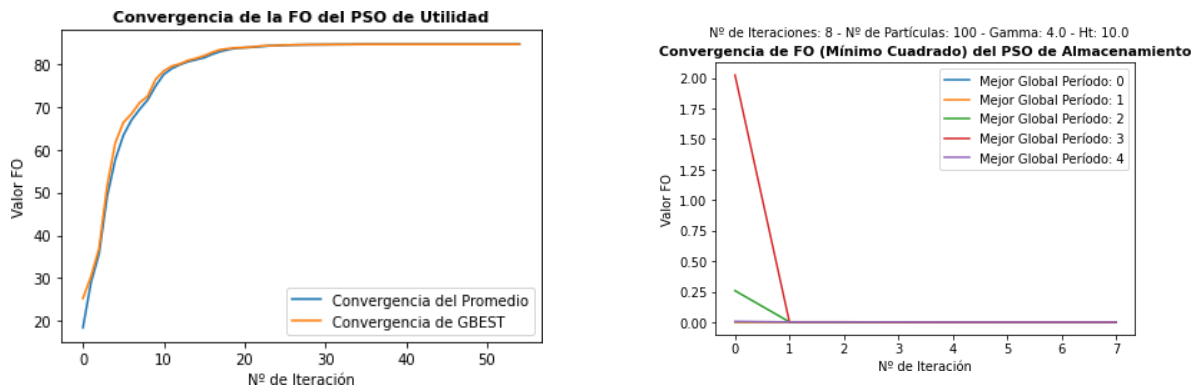


Figura 4.1: Mejor convergencia para la prueba 1 del escenario base.

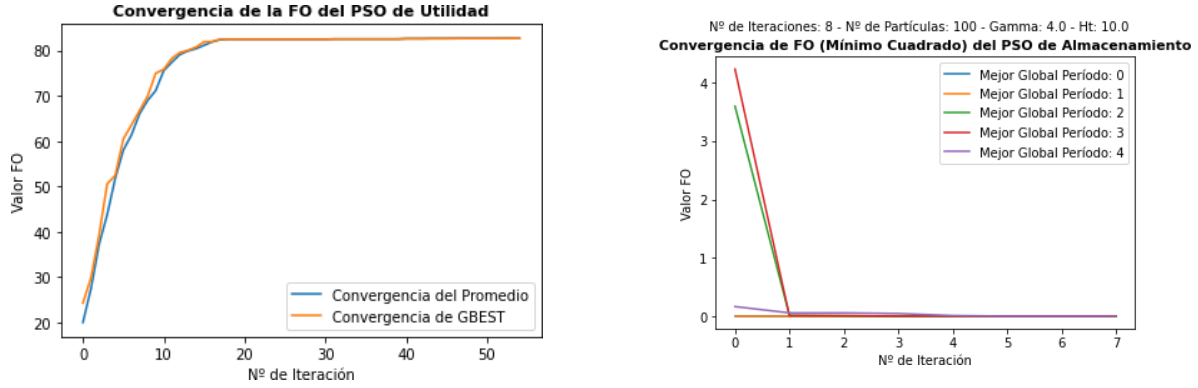


Figura 4.2: Mejor convergencia para la prueba 2 del escenario base.

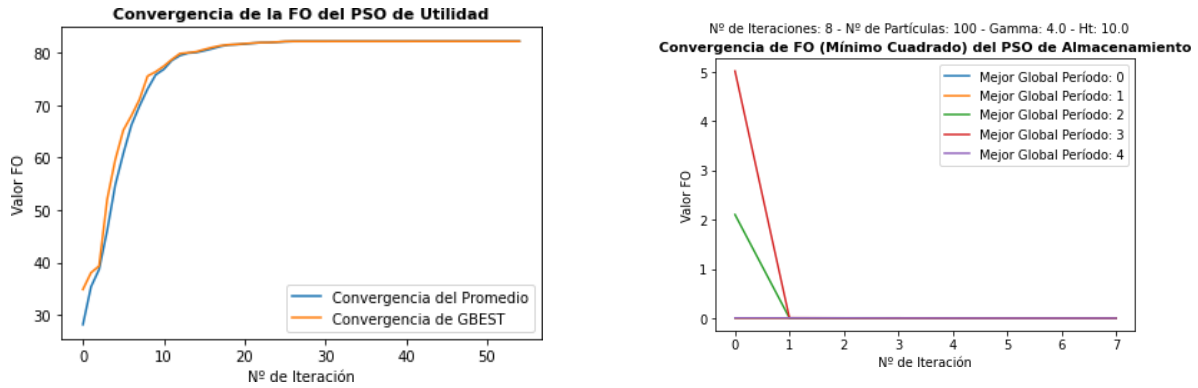


Figura 4.3: Mejor convergencia para la prueba 3 del escenario base.

En los cuadros 4.6, 4.7 y 4.8 se muestran los valores de precios (P_{it}), producción (X_{it}), demanda (D_{it}) y stock (S_{it}) para las tres pruebas, cubriendo todo el horizonte temporal. En definitiva, la metodología demuestra un desempeño satisfactorio, como lo demuestran los resultados casi idénticos en las tres pruebas, la proximidad numérica de los errores de la metodología PSO interna a cero y la convergencia tanto en el PSO principal como en el interno.

El cuadro 4.9, muestra el cálculo del valor real de almacenamiento para cada bien y periodo, confirmando así la precisión del PSO SUB, con diferencias absolutas menores a cero (ver cuadro 4.10), calculadas usando las ecuaciones (4.1) y (4.2), lo que evidencia su alto rendimiento y convergencia. Como con la cantidad producida (X_{it}), no es pertinente centrarse en la cantidad almacenada por período debido a las múltiples soluciones óptimas posibles.

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	Total	Media
P_{it}							
$i = 1$	7,498	7,446	7,492	7,495	7,491	-	7,484
$i = 2$	7,486	7,487	7,495	7,495	7,451	-	7,483
X_{it}							
$i = 1$	2,174	2,091	2,052	3,201	0,487	10,005	2,001
$i = 2$	2,163	2,074	2,508	1,508	1,777	10,030	2,006
D_{it}							
$i = 1$	2,174	2,091	2,009	1,890	1,855	10,019	2,004
$i = 2$	2,163	2,074	2,001	1,940	1,852	10,030	2,006
S_{it}							
$i = 1$	0,000	0,000	0,00425	1,374	0,00795	1,386	0,277
$i = 2$	0,000	0,000	0,508	0,0753	0,000869	0,584	0,117

Cuadro 4.6: Variables de decisión y demandas para la prueba 1 en escenario base.

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	Total	Media
P_{it}							
$i = 1$	7,415	7,373	7,446	7,469	7,465	-	7,434
$i = 2$	7,446	7,491	7,448	7,404	7,373	-	7,432
X_{it}							
$i = 1$	2,178	2,121	2,301	2,975	0,479	10,054	2,011
$i = 2$	2,202	2,105	3,765	0,380	1,451	9,903	1,981
D_{it}							
$i = 1$	2,171	2,091	2,028	1,901	1,842	10,033	2,007
$i = 2$	2,170	2,088	1,878	1,935	1,855	9,926	1,985
S_{it}							
$i = 1$	0,000	0,000	0,271	1,363	0,000519	1,635	0,327
$i = 2$	0,000	0,000	1,889	0,412	0,00771	2,309	0,462

Cuadro 4.7: Variables de decisión y demandas para la prueba 2 en escenario base.

		T_1		T_2		T_3		T_4		T_5	
		S_{i1}	S_{i1}^{real}	S_{i2}	S_{i2}^{real}	S_{i3}	S_{i3}^{real}	S_{i4}	S_{i4}^{real}	S_{i5}	S_{i5}^{real}
$P1_{Casobase}$	i_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00425	0,043	1,374	1,354	0,00795	-0,014
	i_2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,508	0,507	0,0753	0,075	0,000869	0,000
$P2_{Casobase}$	i_1	0,000	0,007	0,000	0,037	0,271	0,310	1,363	1,384	0,000519	0,0021
	i_2	0,000	0,032	0,000	0,049	1,889	1,936	0,412	0,381	0,00771	-0,023
$P3_{Casobase}$	i_1	0,000	0,008	0,000	0,009	0,316	0,332	1,767	1,760	0,00534	-0,0029
	i_2	0,000	0,001	0,000	0,007	1,419	1,427	0,0643	0,040	0,00278	-0,024

Cuadro 4.9: Comparación almacenamiento calculado (S_{it}) vs almacenamiento real (S_{it}^{real}) - Escenario base.

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	Total	Media
P_{it}							
$i = 1$	7,334	7,476	7,481	6,755	7,457	-	7,301
$i = 2$	7,489	7,492	7,455	7,350	7,480	-	7,453
X_{it}							
$i = 1$	2,181	2,090	2,337	3,318	0,0921	10,018	2,004
$i = 2$	2,171	2,095	3,370	0,553	1,787	9,976	1,995
D_{it}							
$i = 1$	2,173	2,089	2,014	1,890	1,855	10,021	2,004
$i = 2$	2,170	2,089	1,950	1,940	1,851	10,000	2,000
S_{it}							
$i = 1$	0,000	0,000	0,316	1,767	0,00534	2,088	0,418
$i = 2$	0,000	0,000	1,419	0,0643	0,00278	1,486	0,297

Cuadro 4.8: Variables de decisión y demandas para la prueba 3 en escenario base.

		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
$P1_{Casobase}$	i_1	0	0	0,0388	0,02	0,00605
	i_2	0	0	0,001	0,0003	0,000869
$P2_{Casobase}$	i_1	0,007	0,037	0,039	0,021	0,00158
	i_2	0,032	0,049	0,047	0,031	0,01529
$P3_{Casobase}$	i_1	0,008	0,009	0,016	0,007	0,00244
	i_2	0,001	0,007	0,008	0,0243	0,0212

Cuadro 4.10: Diferencia almacenamiento calculado vs real ($|S_{it}^{real}| - |S_{it}|$) - Escenario base.

$$S_{it}^{real} = S_{it-1}^{real} + X_{it} - D_{it} \quad (4.1)$$

$$\text{Dif}_{\text{Alm}} = |S_{it}^{real}| - |S_{it}| \quad (4.2)$$

4.1.2. Escenario 1: Análisis de la sustitución limitando los productos más atractivos mediante ajustes de costos y capacidades

En este caso se analiza la preferencia del consumidor hacia un producto atractivo, como se muestra en el cuadro 4.11. No obstante, este producto enfrenta restricciones

por limitaciones de producción o costos elevados, causando escasez en la industria. Además, se comparan dos mercados: uno con alta sensibilidad al precio y otro con baja respuesta a cambios de precios.

Atractivo (I_{it})		
Periodo	Producto 1	Producto 2
1	4,0	6,0
2	3,5	6,25
3	3,0	5,5
4	2,5	4,75
5	2,0	4,0

Cuadro 4.11: Valores de Atractivo (I_{it}) para cada periodo y producto.

Se emplean los mismos costos de mantenimiento (H_{it}) y capacidad de inventario (k_{cap}) especificados en el Cuadro 4.1. En términos de mercado, se mantiene el tamaño del mercado (M_t) y la utilidad de no-compra (V_0) tal como se detalla en el Cuadro 4.2. A continuación, se analiza cuándo un producto es más atractivo y cuándo su producción está limitada por altos costos y bajas capacidades, seguido por una evaluación de casos con alta y baja elasticidad precio.

Costos de producción elevados y escasa capacidad de producción en un mercado muy sensible a los precios

En ambos escenarios de elevados costos de producción y baja capacidad de manufactura, se estudia cómo la utilidad marginal del ingreso de los consumidores (o sensibilidad a los precios) influye en los resultados del modelo. Para ello, se incrementa la elasticidad precio (β) a 0,15 para capturar una mayor elasticidad de demanda frente al escenario base:

1. Para el caso de baja capacidad de producción, se modifica para el bien más atractivo (ver cuadro 4.12). Se espera que este último maximice la producción del bien más atractivo, impulsando las ventas, y aumente la sustitución por escasez de stock.
2. Para el escenario con costos de producción elevados, se aumentan los costos de producción del producto 2, como se detalla en el Cuadro 4.13. La capacidad de producción se mantiene constante para ambos productos ($m_{capi} = 5, \forall i \in \{1, 2\}$) conforme a la hipótesis de referencia. En este escenario, se prevé una disminución en la utilidad del

producto más atractivo y un incremento en la sustitución, impulsado por el aumento en los costos y la alta elasticidad del mercado inducida por el parámetro β .

Capacidades	Producto 1	Producto 2
Capacidad de producción (m_{capi})	5,0	2,0

Cuadro 4.12: Capacidad de producción limitada—Escenario 1.

Costos de producción (C_{it})		
Periodo	Producto 1	Producto 2
1	3,00	5,00
2	2,75	4,75
3	2,50	4,50
4	2,25	4,25
5	2,00	4,00

Cuadro 4.13: Costos de producción para el Escenario 1.

Los resultados se presentan al restringir la capacidad de producción o aumentar los costos del bien más atractivo, en comparación con el escenario de referencia. $ML \uparrow C_{prod}$ y $ML \downarrow m_{Cap}$ corresponden a mercados de altos costos y baja capacidad, respectivamente. El Cuadro 4.14 muestra que limitar la capacidad de producción ofrece mejores márgenes que elevar los costos, dado el impacto directo de las variaciones de costos en la función objetivo.

Función de utilidad de la empresa			
Parámetros	U_{Total}	$U_{Producto1}$	$U_{Producto2}$
$ML \uparrow C_{Prod}$	59,5005	31,887	27,614
$ML \downarrow m_{Cap}$	79,967	41,429	38,538

Cuadro 4.14: Función objetivo de utilidad - Escenario 1: Mercado de alta sensibilidad al precio.

Señalemos que, en ambos casos, los bienes menos atractivos generan más beneficios para la empresa que los bienes más atractivos para los consumidores. En cuanto a la *PSO SUB*, existe un alto nivel de convergencia de ambos escenarios, como se evidencia en los valores obtenidos en el cuadro 4.15.

Función de punto fijo de almacenamiento					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
$ML \uparrow C_{Prod}$	$6,081 \times 10^{-5}$	0,000	$1,045 \times 10^{-6}$	$9,296 \times 10^{-5}$	$1,169 \times 10^{-6}$
$ML \downarrow m_{Cap}$	$1,876 \times 10^{-7}$	0,000	$4,763 \times 10^{-6}$	$3,276 \times 10^{-5}$	$9,843 \times 10^{-7}$

Cuadro 4.15: Función de punto fijo de almacenamiento - Escenario 1: Mercado de alta sensibilidad a los precios.

En el cuadro 4.16, se analizan las variables a medida que los costos de producción aumentan. Respecto al precio (P_{it}) del bien más atractivo, los valores se acercan al máximo ($P_{\max}$) debido a una mayor demanda (D_{it}) del producto en cuestión. En contraste, los precios del bien sustituto muestran caídas significativas en ciertos períodos (T_2 y T_4), resultando en un promedio inferior al del sustituto.

Variables y demandas para $ML_t C_{Prod}$							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Total	Media
P_{it}							
$i = 1$	7,496	4,774	7,445	6,376	7,491	-	6,716
$i = 2$	7,497	7,496	7,497	7,443	7,481	-	7,483
X_{it}							
$i = 1$	1,915	1,925	2,599	1,317	1,395	9,151	1,830
$i = 2$	2,838	2,641	2,513	3,734	0,706	12,432	2,486
D_{it}							
$i = 1$	1,915	1,925	1,804	1,820	1,697	9,161	1,832
$i = 2$	2,830	2,641	2,513	2,230	2,224	12,438	2,488
S_{it}							
$i = 1$	0,000	0,000	0,795	0,302	0,000579	1,098	0,220
$i = 2$	0,000	0,000	0,000754	1,518	0,00131	1,520	0,304

Cuadro 4.16: variables y cálculos de la demanda para $ML \uparrow C_{Prod}$ - Escenario 1.

Los resultados muestran una producción ajustada a la demanda para el producto 2 en los primeros tres periodos, lo que optimiza los costos de fabricación a lo largo del tiempo. Una tendencia similar se observa en el producto 1 durante T_1 y T_2 , destacando una estrategia eficiente en la gestión productiva.

Centrándonos en la demanda (D_{it}), el producto 2 exhibe mayores valores en todos los

períodos. Así, a pesar de su precio superior, un porcentaje significativo de consumidores continúa adquiriendo este bien en lugar del producto 1. En conjunto, se observa un consumo adicional de tres unidades del producto 2 en el escenario analizado.

En el cuadro 4.17, la capacidad de producción del producto 2 está restringida a dos unidades por período, mientras que el producto 1 tiene un máximo de cinco unidades. En primer lugar, los precios (P_{it}) de ambos productos son casi idénticos y se aproximan a $P_{\max}$, y sus medias son prácticamente iguales.

Variables y demandas para ML $\downarrow m_{Cap}$							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Total	Media
P_{it}							
$i = 1$	7,480	7,463	7,491	7,492	7,497	-	7,485
$i = 2$	7,473	7,493	7,494	7,488	7,498	-	7,489
X_{it}							
$i = 1$	2,151	2,040	2,118	2,991	0,544	9,844	1,830
$i = 2$	1,912	1,868	1,864	1,976	1,501	9,121	1,824
D_{it}							
$i = 1$	2,150	2,040	1,975	1,948	1,732	9,845	1,969
$i = 2$	1,912	1,868	1,836	1,420	2,089	9,125	1,825
S_{it}							
$i = 1$	0,000	0,000	0,141	1,194	0,00677	1,342	0,268
$i = 2$	0,000	0,000	0,0292	0,588	0,000378	0,621	0,124

Cuadro 4.17: Variables y cálculo de demandas para ML $\downarrow m_{Cap}$ - Escenario 1.

En segundo lugar, las cantidades producidas (X_{it}) del producto 2 se acercan al máximo en todos los períodos, excepto en el último. Un mayor porcentaje de consumidores recurre a productos sustitutos por falta de disponibilidad, como se observa en T_1 , T_2 y T_3 , debido a que la producción coincide con la demanda. La producción del producto 1 es más alta por la menor restricción en capacidad, pero no alcanza el máximo porque el producto no es el más atractivo.

En tercer lugar, la cantidad total demandada y producida es casi idéntica para ambos productos, con solo 0.72 unidades adicionales para el menos atractivo sin restricciones de producción. Se espera una disminución en la utilidad del producto más atractivo debido al aumento de los costos y un aumento en la sustitución por parte de los consumidores,

dado que el mercado es altamente elástico por el incremento del parámetro β .

Comparación almacenamiento calculado (S_{it}) vs almacenamiento real (S_{it}^{real})										
Parámetros	T_1		T_2		T_3		T_4		T_5	
	S_{i1}	S_{i1}^{real}	S_{i2}	S_{i2}^{real}	S_{i3}	S_{i3}^{real}	S_{i4}	S_{i4}^{real}	S_{i5}	S_{i5}^{real}
ML $\uparrow C_{\text{Prod}}$	i_1	0,000	0,000	0,000	0,795	0,795	0,302	0,292	0,000579	-0,01
	i_2	0,000	0,008	0,000	0,008	0,000754	0,008	1,518	1,512	0,00131
ML $\downarrow m_{\text{Cap}}$	i_1	0,000	0,001	0,000	0,001	0,141	0,144	1,194	1,187	0,00677
	i_2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,0292	0,0280	0,588	0,584	0,000378

Cuadro 4.18: Comparación almacenamiento calculado vs almacenamiento real - Escenario 1: Mercado de alta sensibilidad de precios.

Diferencia almacenamiento calculado vs real $ S_{it}^{\text{real}} - S_{it} $							
		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
ML $\uparrow C_{\text{Prod}}$	i_1	0	0,008	0	0,01	0,0106	
	i_2	0,008	0,008	0,00725	0,006	0,00731	
ML $\downarrow m_{\text{Cap}}$	i_1	0,001	0,001	0,003	0,007	0,00777	
	i_2	0	0	0,0012	0,004	0,00438	

Cuadro 4.19: Diferencia entre almacenamiento calculado y real – Escenario 1: Mercado de alta sensibilidad de precios.

Finalmente, se calcularon las diferencias entre el flujo real de almacenamiento y las estimaciones del PSO SUB. Como en el escenario de referencia, los cuadros 4.18 y 4.19 muestran estos resultados obtenidos con las ecuaciones (4.1) y (4.2). Las diferencias entre el almacenamiento calculado y el real son mínimas en todos los períodos y escenarios, lo que confirma la eficacia del algoritmo y su alta convergencia.

Costos de producción elevados y baja capacidad de producción en un mercado poco sensible a los precios

Para los escenarios con altos costos de producción y baja capacidad, se consideraron clientes con baja sensibilidad a precios ($\beta = 0,05$). Este valor indica que, con grandes variaciones en el precio, el atractivo del ítem cambia poco, indicando una demanda más inelástica respecto al escenario base.

En el caso de **baja capacidad productiva**, los costos se mantienen según el cuadro 4.1, y la capacidad del producto 2 está limitada (ver cuadro 4.12). Este escenario debería

optimizar la producción del bien más atractivo. Con un mercado donde β es menor, se espera que los costos y las cantidades demandadas sean mayores que en el mercado anterior, junto con un aumento en la sustitución hacia el bien menos atractivo debido a la escasez generada.

Con **costos de producción elevados**, se mantienen los costos del cuadro 4.13, mientras que el producto 2 es más caro. Las cantidades demandadas y los precios esperados son mayores que en el escenario anterior debido al cambio en la elasticidad.

El ajuste de la sensibilidad al precio busca mostrar cómo cambian las recomendaciones del modelo ante las diferencias entre productos sustitutos, especialmente cuando el producto más atractivo enfrenta mayores costos y limitaciones de capacidad. La diferencia entre estas dos subsecciones analizadas radica en la simulación del impacto en clientes con distintos grados de sensibilidad a los precios.

En un contexto donde la capacidad del bien más atractivo ($\text{MBI} \uparrow C_{\text{Prod}}$) es limitada, las utilidades superan a las de un escenario con mayores costos ($\text{MBI} \downarrow m_{\text{Cap}}$), ya que la limitación de capacidad no afecta directamente las utilidades como lo hace un aumento de costos (ver cuadro 4.20). Además, el bien menos atractivo, sin restricciones, genera mayores beneficios. El cuadro 4.21 muestra la convergencia al punto fijo de la PSO de almacenamiento.

Función de utilidad de la empresa			
	U_{Total}	$U_{\text{Producto1}}$	$U_{\text{Producto2}}$
MBI $\uparrow C_{\text{Prod}}$	68,074	34,735	29,339
MBI $\downarrow m_{\text{Cap}}$	83,491	43,836	39,655

Cuadro 4.20: Función objetivo de utilidad-Escenario 1: Mercado de baja sensibilidad al precio.

Valor función de punto fijo de almacenamiento					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
MBI $\uparrow C_{\text{Prod}}$	$0,000 \times 10^0$	$1,822 \times 10^{-3}$	$6,517 \times 10^{-5}$	$7,644 \times 10^{-5}$	$2,749 \times 10^{-6}$
MBI $\downarrow m_{\text{Cap}}$	$1,757 \times 10^{-5}$	$7,100 \times 10^{-6}$	$6,313 \times 10^{-7}$	$1,228 \times 10^{-5}$	$3,913 \times 10^{-7}$

Cuadro 4.21: Función de punto fijo de almacenamiento – Escenario 1: Mercado de baja sensibilidad a los precios.

En el Cuadro 4.22 se muestran las variables para un escenario de altos costos de pro-

ducción con una sensibilidad a precios (β) reducida. Los precios en este contexto son más altos en comparación con un mercado de mayor sensibilidad a precios, lo cual es esperado debido a la menor sensibilidad de los consumidores. Además, el precio del bien más atractivo es superior al del producto 1.

Variables y demandas para $\text{MBI} \uparrow C_{Prod}$							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Total	Media
$\mathbf{P}_{it}$							
$i = 1$	6,808	7,463	7,418	6,376	7,473	-	7,108
$i = 2$	7,492	7,480	7,495	7,482	7,470	-	7,484
$\mathbf{X}_{it}$							
$i = 1$	2,019	1,976	2,318	2,376	0,879	9,568	1,914
$i = 2$	2,920	2,853	3,200	2,278	1,976	13,227	2,645
$\mathbf{D}_{it}$							
$i = 1$	2,019	1,970	1,920	1,854	1,808	9,571	1,914
$i = 2$	2,920	2,811	2,620	2,504	2,355	13,210	2,642
$\mathbf{S}_{it}$							
$i = 1$	0,000	0,000	0,394	0,930	0,0000931	1,324	0,265
$i = 2$	0,000	0,000	0,587	0,382	0,002985	0,972	0,194

Cuadro 4.22: Variables y cálculos de demandas - Escenario 1 ($\text{MBI} \uparrow C_{Prod}$).

A continuación, se observa que tanto la demanda como la producción de ambos productos superan las del mercado previo, lo cual concuerda con la reducción del parámetro β . El producto 2 muestra mayores cantidades a lo largo del horizonte temporal.

Durante los dos primeros períodos, la producción iguala la demanda para ambos productos debido a la reducción de los costos de producción, lo que sugiere que no es óptimo sobreproducir para almacenamiento en estas etapas.

El cuadro 4.23 muestra los valores de las variables cuando la capacidad de producción del producto más atractivo está limitada. En este escenario, los precios se aproximan al límite superior para ambos productos, salvo en el último período para el bien menos atractivo. El producto 2 presenta un ligero descenso en comparación con el escenario de incremento de costos.

Finalmente, en los cuadros 4.24 y 4.25 se presenta una correcta convergencia del PSO SUB. Específicamente, al aplicar las ecuaciones (4.1) y (4.2), se cuantifica el error asociado al cálculo del almacenamiento, comparando los resultados generados por el

Variables y cálculos de demandas – Escenario 1 (MBI ↓ m_{Cap})							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Total	Media
P_{it}							
$i = 1$	7,486	7,498	7,500	7,492	7,030	-	7,401
$i = 2$	7,484	7,459	7,496	7,492	7,468	-	7,480
X_{it}							
$i = 1$	2,311	2,214	2,102	2,507	1,380	10,514	2,103
$i = 2$	1,946	1,919	1,985	1,741	1,796	9,387	1,877
D_{it}							
$i = 1$	2,307	2,211	2,102	1,957	1,931	10,508	2,102
$i = 2$	1,946	1,919	1,593	2,089	1,849	9,396	1,879
S_{it}							
$i = 1$	0,000	0,000	0,000645	0,555	0,00304	0,559	0,112
$i = 2$	0,000	0,000	0,391	0,0547	0,00116	0,447	0,089

Cuadro 4.23: Variables y cálculos de demandas – Escenario 1 (MBI ↓ m_{Cap}).

algoritmo con los valores obtenidos mediante el modelo de flujo. El cuadro 4.25 muestra que el error del PSO SUB es considerablemente bajo, lo que confirma su adecuación y precisión para abordar el problema analizado.

Comparación almacenamiento calculado (S_{it}) vs almacenamiento real (S_{it}^{real})										
	T_1		T_2		T_3		T_4		T_5	
Parámetros	S_{i1}	S_{i1}^{real}	S_{i2}	S_{i2}^{real}	S_{i3}	S_{i3}^{real}	S_{i4}	S_{i4}^{real}	S_{i5}	S_{i5}^{real}
MBI ↑ C_{Prod}	i_1	0,000	0,000	0,006	0,394	0,404	0,930	0,926	0,000931	-0,003
	i_2	0,000	0,000	0,042	0,587	0,622	0,382	0,396	0,002985	0,017
MBI ↓ m_{Cap}	i_1	0,000	0,004	0,007	0,000645	0,007	0,555	0,557	0,00304	0,006
	i_2	0,000	0,000	0,000	0,392	0,392	0,0547	0,044	0,00116	-0,009

Cuadro 4.24: Comparación almacenamiento calculado vs real - Escenario 1: Mercado de baja sensibilidad de precios.

4.1.3. Escenario 2: Limitación de un producto más atractivo mediante parámetros CMNL

En este escenario, se modela un producto de mayor atractivo, donde la escasez se incorpora ajustando los parámetros del CMNL mediante un incremento en el grupo de consumidores (M_t) y una reducción en la utilidad de no-compra (V_0) de estos.

Diferencia almacenamiento calculado vs real $ S_{it}^{\text{real}} - S_{it} $		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
MBI $\uparrow C_{Prod}$	i_1	0	0,006	0,01	0,04	0,000309
	i_2	0	0,042	0,035	0,014	0,0140
MBI $\downarrow m_{Cap}$	i_1	0,004	0,007	0,00636	0,002	0,00296
	i_2	0	0	0	0,0107	0,0102

Cuadro 4.25: Diferencia entre almacenamiento calculado vs real – Escenario 1: Mercado de baja sensibilidad de precios.

Este análisis examina un escenario donde el producto 2 es más atractivo que su alternativo, manteniendo constantes las capacidades y costos según los cuadros 4.11, 4.12 y 4.13. Con una sensibilidad al precio ($\beta = 0,1$), se evalúan variaciones en los parámetros del modelo CMNL, incrementando el segmento de mercado a 15 individuos y reduciendo la utilidad de no-compra primero a dos y luego a uno.

Mercado de gran segmento de clientes

En este caso, se varía la cantidad de participantes en el mercado, preservando simultáneamente una utilidad de no-compra normal (ver cuadro 4.26). La escasez se modela al introducir un gran número de clientes que intentan adquirir los bienes disponibles, enfrentándose a una disponibilidad limitada debido a las restricciones de las capacidades productivas.

Parámetros CMNL	Valor
Tamaño del segmento (M_t)	15,0
Utilidad de no-compra (V_0)	4,0
Sensibilidad al precio (β)	0,10

Cuadro 4.26: Parámetros CMNL-Escenario No.2 alto: M_t .

El aumento del tamaño de mercado prevé un incremento en la demanda y la producción, particularmente para el bien más atractivo, junto con un probable incremento en los precios debido a la mayor demanda. Para representar un mercado grande, se establece $M_t = 15$. Las funciones de utilidad obtenida al ejecutar el algoritmo con el cambio propuesto se muestran en el cuadro 4.27.

Función de utilidad de la empresa		
U_{Total}	$U_{Producto1}$	$U_{Producto2}$
137,200	59,117	78,083

Cuadro 4.27: Función objetivo de utilidad — Escenario 2: Aumento del tamaño del mercado.

El aumento significativo en las utilidades respecto a la hipótesis de referencia es congruente con las expectativas, dado el incremento de cinco individuos en el mercado. El producto 2, al tener una mayor atracción, maximiza las utilidades. Para PSO SUB, la cantidad almacenada debe ajustarse según la función de punto fijo, ya que los valores mínimos en el cuadro 4.28 sugieren una necesidad de optimización en los niveles de inventario.

Función de punto fijo de almacenamiento					
Periodo	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Valor	$2,878 \times 10^{-4}$	$4,760 \times 10^{-4}$	$4,631 \times 10^{-5}$	$5,270 \times 10^{-5}$	$1,081 \times 10^{-4}$

Cuadro 4.28: Valores para diferentes periodos de función de punto fijo de almacenamiento - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado

El análisis del Cuadro 4.29 muestra que el precio (P_{it}) de ambos productos es cercano a $P_{\max}$, y la cantidad producida (X_{it}) del producto más atractivo supera a la de la alternativa durante todo el horizonte temporal. Esta producción coincide con la demanda inicial y no se destina a almacenamiento debido a los altos costos de producción en esa fase.

Por ende, se evalúa el cálculo del almacenamiento con las ecuaciones (4.1) y (4.2), cuyos resultados se muestran en los cuadros 4.30 y 4.31. La convergencia del algoritmo PSO SUB es positiva, con diferencias mínimas entre el almacenamiento calculado y el real en todos los casos.

Baja utilidad de no-compra

Por último, se analiza la escasez limitando la utilidad de no-compra y manteniendo M_t en parámetros referenciales. Este ajuste busca elevar la probabilidad de demanda al reducir la no-compra (ver cuadro 4.32). En este contexto, se espera un incremento en

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Total	Media
P_{it}							
i = 1	7,489	7,401	7,482	7,490	7,465	-	7,465
i = 2	7,498	7,489	7,451	7,462	7,458	-	7,472
X_{it}							
i = 1	3,025	2,936	3,295	2,792	2,027	14,075	2,815
i = 2	4,008	3,864	3,713	3,787	2,977	18,349	3,670
D_{it}							
i = 1	3,008	2,914	2,772	2,743	2,637	14,074	2,815
i = 2	4,008	3,864	3,713	3,443	3,393	18,421	3,684
S_{it}							
i = 1	0,000	0,000	0,516	0,610	0,0085	1,135	0,227
i = 2	0,000	0,000	0,000515	0,417	0,00721	0,425	0,0850

Cuadro 4.29: Variables y cálculos de la demanda - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado.

Comparación almacenamiento calculado (S_{it}) vs almacenamiento real (S_{it}^{real})										
	T_1		T_2		T_3		T_4		T_5	
	S_{i1}	S_{i1}^{real}	S_{i2}	S_{i2}^{real}	S_{i3}	S_{i3}^{real}	S_{i4}	S_{i4}^{real}	S_{i5}	S_{i5}^{real}
i_1	0,000	0,017	0,000	0,039	0,516	0,562	0,610	0,611	0,00850	0,001
i_2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000515	0,000	0,417	0,344	0,00721	-0,072

Cuadro 4.30: Comparación almacenamiento calculado vs real - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado.

Diferencia almacenamiento calculado vs real					
	$ S_{it}^{\text{real}} - S_{it} $				
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
i_1	0,017	0,039	0,046	0,001	0,0075
i_2	0	0	0,000515	0,073	0,0792

Cuadro 4.31: Diferencia almacenamiento calculado vs real - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado.

las cantidades demandadas, especialmente para el producto más atractivo, a medida que disminuye la utilidad de no-compra y un posible aumento en los precios debido a la mayor necesidad de adquisición.

En el Cuadro 4.33 se presentan las utilidades para cada configuración. En el caso con

Parámetro	Valor
Tamaño segmento (H_t)	10,0
Utilidad de no-compra (V_0)	[1; 2]
Sensibilidad al precio (β)	0,10

Cuadro 4.32: Parámetros CMNL - Escenario No.2: bajo V_0

una utilidad de no-compra reducida, el beneficio total individual para ambos productos es superior. Este hallazgo es consistente con la teoría, ya que una menor V_0 refleja una mayor urgencia de adquisición, análoga a la reducción de beta.

Función de utilidad de la empresa			
	U_{Total}	$U_{Producto1}$	$U_{Producto2}$
$E_{V_0=2}$	127,968	53,799	74,169
$E_{V_0=1}$	154,436	67,609	86,827

Cuadro 4.33: Función objetivo de utilidad - Escenario 2: Variación de utilidad de no-compra.

El cuadro 4.34 presenta una función positiva de PSO SUB que detalla la convergencia del algoritmo, con la función de punto fijo para almacenamiento acercándose a cero en todos los periodos y para ambos productos.

Función de punto fijo de almacenamiento					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
$\mathbf{E}_{V_0=2}$	$5,117 \times 10^{-6}$	$0,000 \times 10^0$	$1,285 \times 10^{-5}$	$8,264 \times 10^{-6}$	$4,210 \times 10^{-5}$
$\mathbf{E}_{V_0=1}$	0,000	$0,000 \times 10^0$	$8,934 \times 10^{-6}$	$6,956 \times 10^{-6}$	$2,554 \times 10^{-6}$

Cuadro 4.34: Función de punto fijo de almacenamiento - Escenario 2: Variación de utilidad de no-compra.

En el cuadro 4.35, se muestra que el precio (P_{it}) tiende a P_{max} para ambos productos, con un aumento marginalmente mayor para el bien más atractivo.

En los dos primeros periodos, la cantidad producida (X_{it}) coincide con la demanda (D_{it}), evitando costos adicionales. Las cantidades del producto 2 superan en cerca de cinco unidades a las de la alternativa, sugiriendo una preferencia por bienes atractivos. Sin embargo, la alta tasa de sustitución indica un mercado con alta necesidad y baja utilidad de no-compra.

Variables y cálculos de demandas - Escenario 2 ($E_{V_0=2}$)							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Total	Media
P_{it}							
i = 1	7,480	7,488	7,490	7,485	7,437	-	7,476
i = 2	7,495	7,489	7,492	7,496	7,494	-	7,493
X_{it}							
i = 1	2,701	2,644	2,881	3,908	0,704	12,838	2,568
i = 2	3,758	3,612	3,556	3,526	3,018	17,470	3,494
D_{it}							
i = 1	2,700	2,644	2,598	2,379	2,515	12,836	2,567
i = 2	3,755	3,612	3,485	3,395	3,220	17,467	3,493
S_{it}							
i = 1	0,000	0,000	0,286	1,819	0,000259	2,105	0,421
i = 2	0,000	0,000	0,0729	0,208	0,00998	0,291	0,0582

Cuadro 4.35: Variables y cálculos de demandas para el escenario 2 ($E_{V_0=2}$).

En el cuadro 4.36, con una utilidad de no compra reducida ($V_0 = 1$) y mayor necesidad de adquisición, los precios se acercan al valor máximo. Las cantidades producidas y almacenadas aumentan considerablemente para ambos bienes, y un mayor porcentaje de clientes sustituye el bien más atractivo, con una diferencia de cuatro unidades, debido al incremento en la necesidad de adquisición.

En los casos anteriores, la producción cubre la demanda en los tres primeros periodos debido a los elevados costos de producción. En las etapas siguientes, la producción aumenta para satisfacer la demanda, dado que estos costos disminuyen con el tiempo. Ahora, se evalúa la precisión de la estimación de S_{it} por el algoritmo PSO SUB mediante las ecuaciones (4.1) y (4.2) aplicadas a los datos de los cuadros 4.37 y 4.38. Los resultados muestran una discrepancia mínima entre el almacenamiento estimado y el real, evidenciando la alta convergencia del algoritmo.

4.2. Diseño de campañas de retención de clientes

En este estudio, se utilizó un conjunto de datos de abandono (*churn*) de una empresa de telecomunicaciones disponible públicamente desde Kaggle¹. El conjunto de datos

¹Kaggle: Telco Churn EDA CV Score 85 F1 Score 80

Variables y cálculo de demandas - Escenario 2 ($E_{V_0=1}$)							
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Total	Media
P_{it}							
i=1	6,755	7,484	7,486	7,420	7,492	-	7,327
i=2	7,493	7,495	7,489	7,484	7,489	-	7,490
X_{it}							
i=1	3,373	3,367	3,395	3,602	2,850	16,557	3,311
i=2	4,244	4,198	4,285	3,875	3,860	20,462	4,092
D_{it}							
i=1	3,373	3,367	3,395	3,188	3,267	16,590	3,318
i=2	4,244	4,198	3,979	4,128	3,923	20,472	4,094
S_{it}							
i=1	0,000	0,000	0,000588	0,419	0,000385	0,420	0,0840
i=2	0,000	0,000	0,304	0,0623	0,000885	0,367	0,0734

Cuadro 4.36: Variables y cálculos de demandas - Escenario 2: Disminución de la utilidad no-compra ($E_{V_0=1}$).

Comparación almacenamiento calculado (S_{it}) vs almacenamiento real (S_{it}^{real})											
		T_1		T_2		T_3		T_4		T_5	
Parámetros		S_{i1}	S_{i1}^{real}	S_{i2}	S_{i2}^{real}	S_{i3}	S_{i3}^{real}	S_{i4}	S_{i4}^{real}	S_{i5}	S_{i5}^{real}
E_{V0=2}	i_1	0,000	0,001	0,000	0,001	0,286	0,284	1,819	1,813	0,000259	0,002
	i_2	0,000	0,003	0,000	0,003	0,0729	0,074	0,208	0,205	0,00998	0,003
E_{V0=1}	i_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000588	0,000	0,419	0,414	0,000385	-0,003
	i_2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,304	0,306	0,0623	0,053	0,000885	-0,01

Cuadro 4.37: Comparación almacenamiento calculado vs real - Escenario 2: Variación de utilidad de no-compra.

Diferencia almacenamiento calculado vs real $ S_{it}^{\text{real}} - S_{it} $						
		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
E_{V0=2}	i_1	0,001	0,001	0,002	0,006	0,00174
	i_2	0,003	0,003	0,0011	0,003	0,00698
E_{V0=1}	i_1	0	0	0,000588	0,005	0,00339
	i_2	0	0	0,002	0,0093	0,0109

Cuadro 4.38: Diferencia almacenamiento calculado vs real – Escenario 2: Variación en utilidad de no-compra.

contiene 7,043 registros, de los cuales 5,174 (73.5 %) no abandonaron (*no-churners*) y 1,869 (26.5 %) abandonaron (*churners*). La información disponible incluye 20 campos, de los cuales utilizamos el cargo mensual (monthly charge) como indicador del valor V , la frecuencia F como el número de meses con la empresa o antigüedad (tenure), y NPS para la lealtad L .

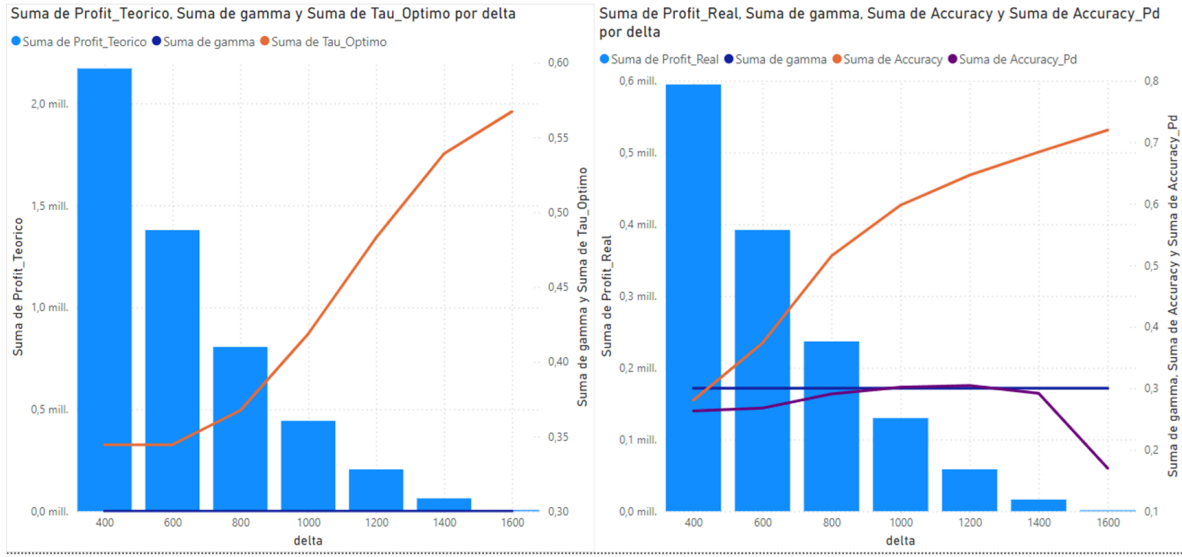
Probamos varias reglas, todas lógicamente consistentes con la idea de que F , V , y L más altos conducen a una menor probabilidad de tener un cliente que abandona. Específicamente, creamos distintas combinaciones descritas en el apéndice B. Considerando un esquema de clasificación básico, obtuvimos los resultados en el cuadro 4.39. Un valor de $D = 0,5$ indica el umbral para ser abandono (*churner*) o no: si para el cliente $i \in \{1, \dots, N\}$ es $D_i \geq 0,5$, entonces se clasifica como un abandono (*churner*) (1), y si $D_i < 0,5$, entonces se clasifica como no abandono (*no-churner*) (0).

FIS	V	Or/And	F	Or/And	L	Accuracy
1 (Caso Base)	Bajo	Or	Baja	Or	Baja	53,3 %
2	Bajo	And	Baja	Or	Baja	64,0 %
3					Baja	68,5 %
4 ($\gamma = K\delta$)			Baja			64,5 %
5	Bajo					53,4 %
6	Bajo	Or	Baja	And	Baja	53,5 %
7	Bajo	And	Baja			64,6 %
8	Medio / Alto	Or	Media / Alta			64,6 %

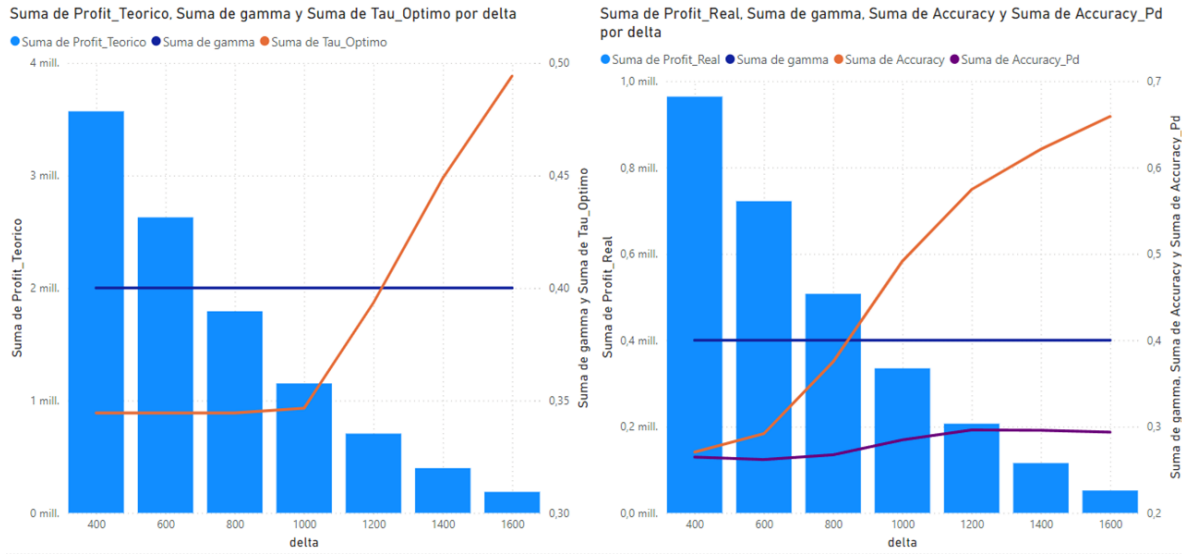
Cuadro 4.39: Resultados de Combinaciones de Reglas FIS

En este contexto, podemos analizar al menos dos grupos de casos: uno similar a los propuestos por algunos autores en este campo (Verbraken et al., 2012; Óskarsdóttir et al., 2018; Maldonado et al., 2021), donde no hay una relación directa entre el incentivo δ y la propensión a aceptar la campaña γ , y otro donde hay una relación proporcional simple tal que $\gamma = h(\delta) = K\delta$, como se resuelve teóricamente en la subsección 3.2.1

Las figuras 4.4(a) y 4.4(b) tienen la misma estructura. En la figura de la izquierda, observamos el beneficio total teórico obtenido en barras azules, el valor constante de γ , y el umbral τ que representa el target óptimo. En la figura de la derecha, se muestra el beneficio real obtenido (utilizando la etiqueta de clientes que abandonan '*churner*' y γ), el valor constante de γ , la sensibilidad de la predicción FIS (total de clientes que abandonan '*churners*' dividido por el número de consumidores que se predicen como



(a) Métricas de rendimiento para $\gamma = 0,3$



(b) Métricas de rendimiento para $\gamma = 0,4$

Figura 4.4: Reglas FIS del caso base para dos valores de γ .

clientes que abandonan, y la precisión (*accuracy*) corregida. En ambos casos (Figura 4.4(a) y Figura 4.4(b)), solo varía el valor de γ , que, como se ha señalado, es un supuesto fijo y no cambia al variar δ .

En este contexto, es posible concluir que el beneficio disminuye a medida que aumenta δ . Esto coincide con las observaciones realizadas por (Maldonado et al., 2021) y tiene sentido porque simplemente refleja una campaña más cara que ofrece mayores incentivos sin mejorar el beneficio (*profit*) o una mejora efectiva (*effective uplift*) con respecto a la

precisión de referencia (*baseline accuracy*) (véase cuadro 4.39), dado que γ se mantiene fijo. Aunque la precisión global (*accuracy*) mejora ligeramente a medida que δ aumenta, esto solo es aparente si se tiene en cuenta que el número de clientes contactados aumenta a medida que τ crece. Por lo tanto, más clientes contactados acerca el ratio a la tasa de abandono de referencia (*baseline churn rate*) de la base de datos total. En otras palabras, este esquema, que emula el propuesto anteriormente, no permite optimizar los incentivos δ que se incluyen en la campaña, ni produce realmente una mejora (*uplift*) de la campaña.

Consideremos ahora el enfoque matemático descrito en la sección 3.2.1, que aplicamos para revelar la forma de la función de beneficio en relación con la variable de decisión del incentivo de la campaña, δ , la cual es particularmente significativa, ya que encierra la novedad de esta investigación. Esta metodología es sencilla: en primer lugar, la etapa FIS de Mamdani estima el número D_i para cada cliente de la base de datos. Luego, se exploran los valores incrementales de $\delta > 0$ para estimar posteriormente i^* y, en consecuencia, el τ^* que maximiza el beneficio de la campaña para ese valor de incentivo. De este modo, se construye la curva de ganancia (*profit curve*) en función del incentivo para una segmentación óptima (*optimal targeting*). La Figura 4.5 proporciona un diagrama explicativo de esta metodología.

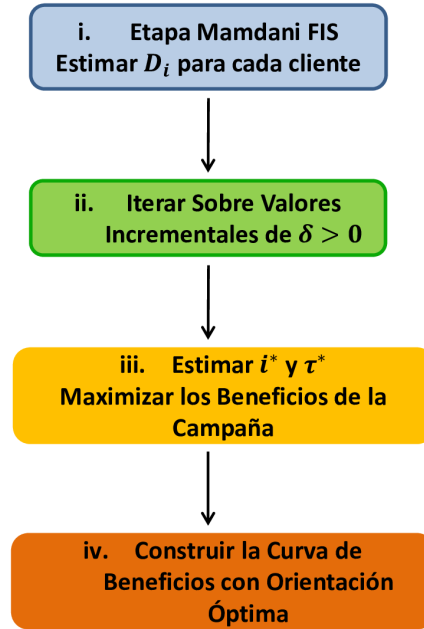


Figura 4.5: Diagrama explicativo de la metodología numérica para maximizar el beneficio de una campaña.

La estructura en bloques permite una comprensión clara y secuencial del proceso. Cada bloque representa una etapa clave en la metodología, lo que facilita seguir el flujo lógico de la optimización de la campaña: El primer bloque, que se centra en la etapa del sistema de inferencia difusa de Mamdani para estimar D_i para cada cliente, es fundamental. La capacidad de categorizar a los clientes según su propensión a abandonar la empresa es esencial para dirigir las campañas de retención de manera efectiva. Este bloque establece la base para los pasos posteriores. El segundo bloque, que corresponde a la iteración sobre valores incrementales de (δ) es un enfoque práctico para evaluar cómo diferentes incentivos pueden afectar la respuesta de los clientes. Este bloque es relevante para entender la sensibilidad de los clientes a los incentivos y permite ajustar la estrategia de la campaña en función de los resultados obtenidos. El tercer bloque, referente a la estimación de i^* y τ^* , se centra en la maximización de los beneficios de la campaña, lo que es el objetivo final del proceso. La estimación de i^* (la cantidad óptima de clientes a contactar) y τ^* (el umbral óptimo para la aceptación de la campaña) es esencial para asegurar que los recursos se utilicen de manera eficiente y que se logren los mejores resultados posibles. El cuarto bloque, referente a la construcción de la curva

de beneficios con orientación óptima es un paso final que permite visualizar el impacto de las decisiones tomadas en los bloques anteriores. Esta curva puede ser una herramienta poderosa para la toma de decisiones, ya que muestra cómo varían los beneficios en función de los diferentes incentivos y estrategias implementadas. La interconexión entre los bloques es clave. Cada etapa depende de la anterior, y el diagrama debe reflejar cómo los resultados de un bloque alimentan el siguiente. Esto no solo refuerza la lógica del proceso, sino que también ayuda a identificar áreas donde se pueden realizar ajustes o mejoras, además de apreciar cómo cada etapa contribuye al objetivo final. Asimismo, la claridad en la presentación de cada bloque puede ayudar a los profesionales a aplicar esta metodología en sus propias campañas de retención de clientes.

La figura 4.6, refleja el enfoque en la inferencia difusa (MISO Mamdani) empleado para evaluar la propensión de los clientes a abandonar la empresa (*churn*) y la optimización relacionada con la retención de clientes para maximizar el beneficio de una campaña, similar a lo que se describe en la figura 4.5 antes descrita.

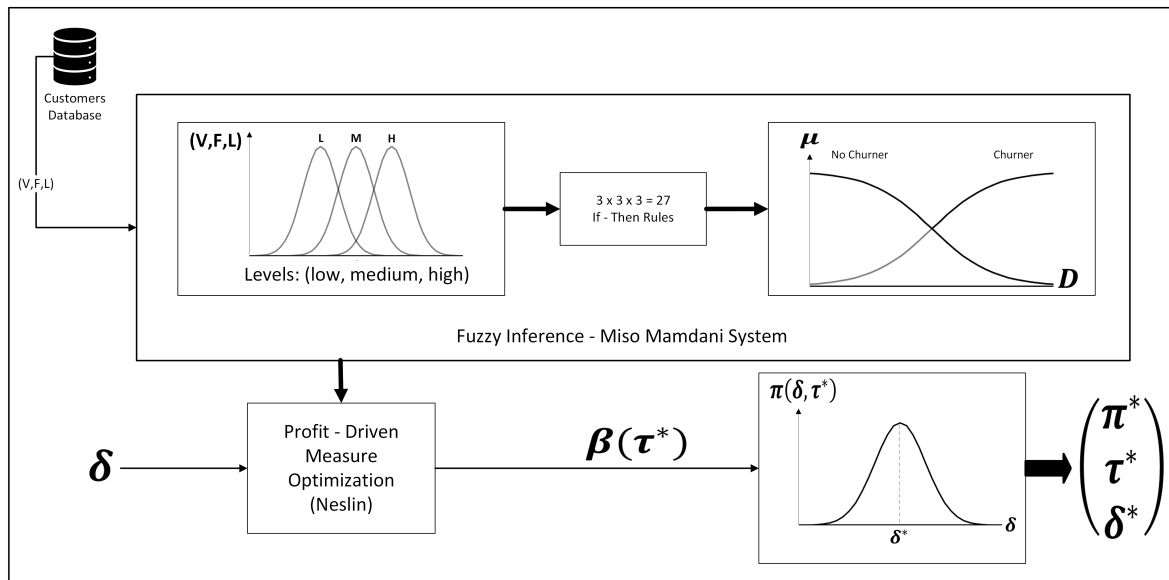


Figura 4.6: Diagrama del modelo de Inferencia Difusa para Optimización de Retención de Clientes.

Descripción de los componentes:

a) Base de Datos de Clientes:

- Se utilizan datos de clientes para alimentar el sistema, incluyendo variables

como el valor de compra (V), la frecuencia de compra (F) y la lealtad (L).

b) Niveles de Entrada (V, F, L):

- Las variables de entrada se categorizan en tres niveles: bajo (L), medio (M) y alto (H), representados gráficamente mediante funciones de pertenencia.

c) Sistema de Inferencia Difusa:

- Se aplican 27 reglas *if-then* derivadas de la combinación de las variables de entrada (3 niveles para cada una de las 3 variables).
- Estas reglas determinan la salida difusa D, que indica la propensión del cliente a ser un *churner* (es decir, un cliente que probablemente abandonará la empresa).

d) Defuzzificación:

- La salida difusa se traduce en un valor nítido que representa la probabilidad de que un cliente sea un *churner*.

e) Optimización de Medidas Basada en Beneficios:

- Se utiliza un modelo de optimización basado en el trabajo de Neslin, que busca maximizar los beneficios empleando la salida del sistema de inferencia difusa.

f) Funciones de Beneficio:

- La relación entre las decisiones de marketing y la optimización de la retención de clientes se evalúa mediante funciones de beneficio, que se representan gráficamente en el último componente de la figura.

En resumen, la figura 4.6 ilustra un proceso que utiliza datos de clientes para evaluar su riesgo de abandono mediante un sistema de inferencia difusa, alimentando un modelo de optimización que busca maximizar los beneficios de las campañas de retención de clientes y complementa la metodología descrita en la figura 4.5 al detallar el proceso de categorización y análisis que alimenta la estrategia de optimización de campañas de retención.

Aplicando esta metodología (Figura 4.5 y Figura 4.6), realizamos estimaciones numéricas para diversos valores de $K \in \{0,0002, 0,00025, 0,0003\}$, considerando los conjuntos de reglas del caso base y del cuarto caso, donde el accuracy natural del FIS (con un umbral en $D = 0,5$) es mejor que la del caso base. Los resultados se muestran en las Figuras 4.7 y 4.8. Asimismo, en el apéndice B encontrará información detallada de la sensibilización de las reglas de Mamdani con el análisis de las distintas métricas de rendimiento.

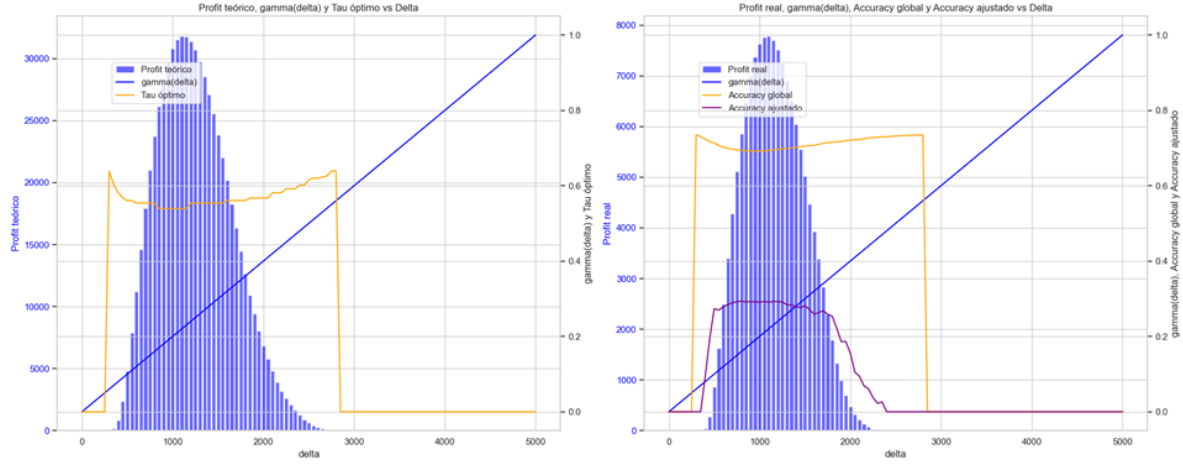
En las Figuras 4.7 y 4.8, ambas muestran tres valores de $K \in \{0,0002, 0,00025, 0,0003\}$, que indican la eficacia del incentivo δ para mejorar la propensión a aceptar la campaña γ . En cada uno de estos tres casos, hay dos gráficos. El eje X representa el valor del incentivo δ tanto en el gráfico de la izquierda como en el de la derecha.

En el gráfico de la izquierda, las barras azules muestran el beneficio teórico alcanzable con la campaña, la línea recta azul representa la relación $\gamma = K\delta$, y la línea amarilla representa el umbral óptimo τ^* obtenido para cada valor de δ .

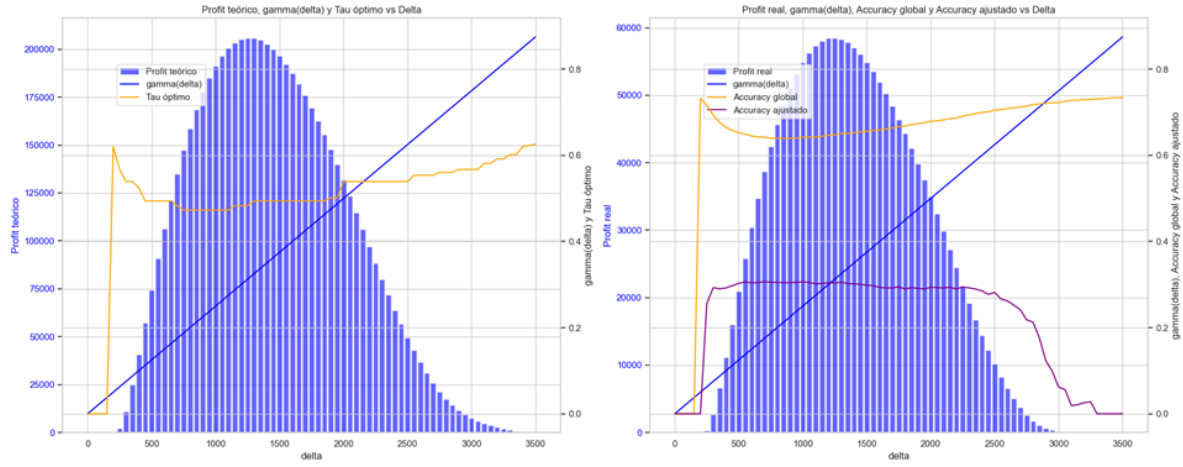
En el gráfico de la derecha, las barras azules muestran el beneficio real estimado, la línea recta azul representa la relación $\gamma = K\delta$, la línea amarilla muestra el accuracy real del FIS limitado al universo de clientes objetivo (*customers targeted*) de la campaña, y la línea morada representa la sensibilidad del conjunto de reglas, ya que se refiere solo a aquellos clientes que realmente abandonaron (*actual churners*), dividido por el total de clientes que se predijo que abandonarían (*churners*) utilizando el esquema FIS.

Análisis de discrepancias entre beneficios teóricos y reales en campañas de retención: Hacia una Optimización basada en métricas de rendimiento

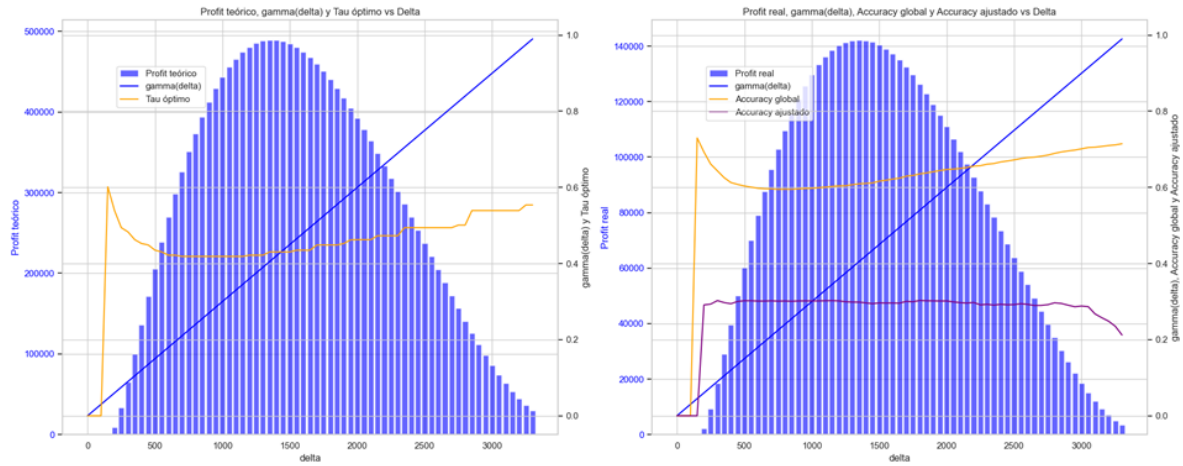
La figura 4.9 muestra la evaluación comparativa del beneficio teórico frente al beneficio real en campañas de retención. El beneficio teórico representa el rendimiento potencial de todos los clientes contactados en la campaña, mientras que el beneficio real se centra en los clientes que efectivamente abandonaron (*churners*) y fueron captados.



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$

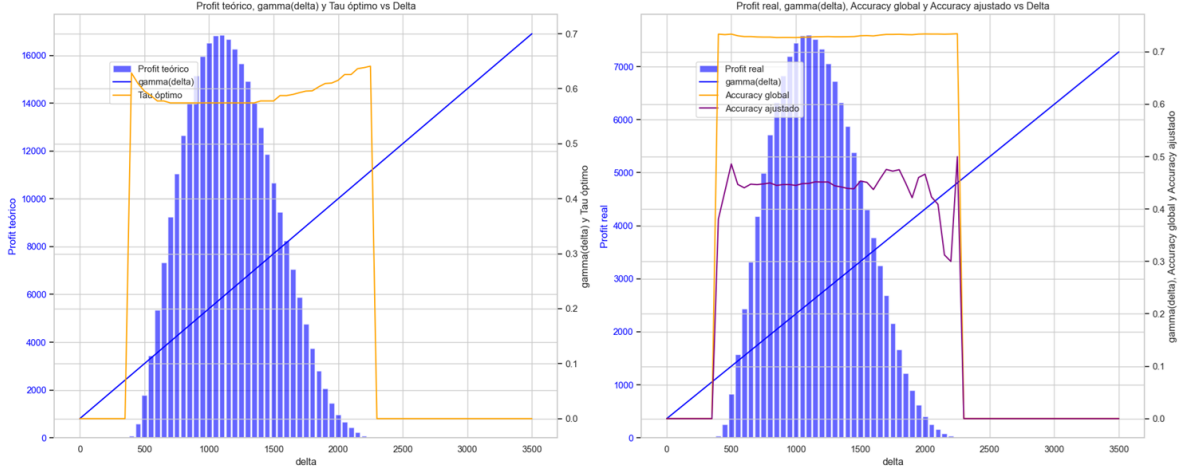


(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$

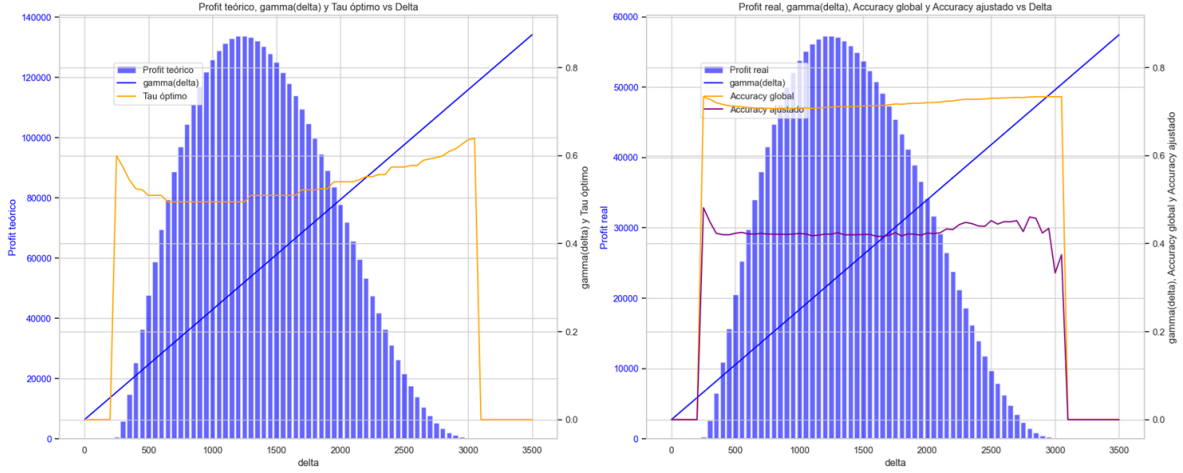


(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

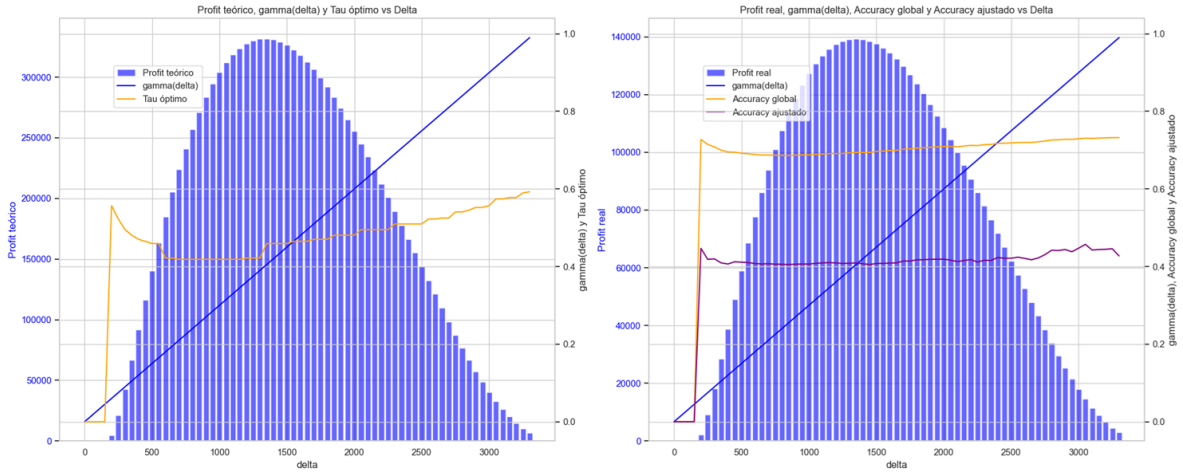
Figura 4.7: Reglas FIS del caso Base para tres valores de K



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$

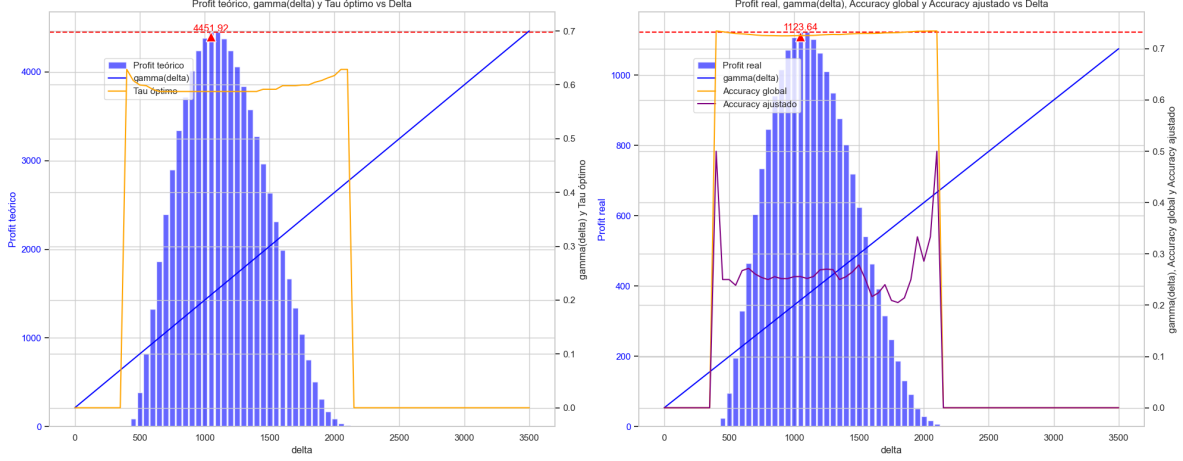


(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$

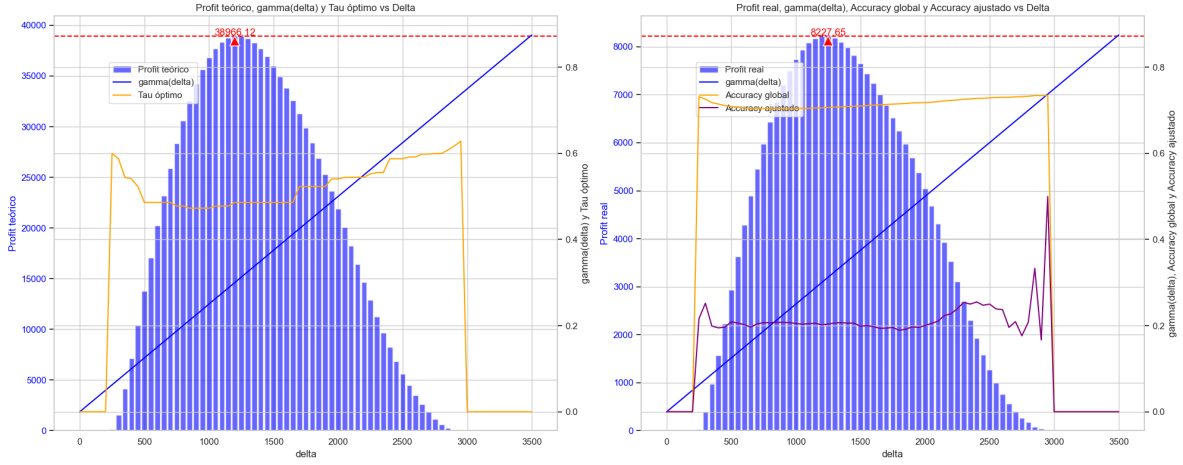


(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

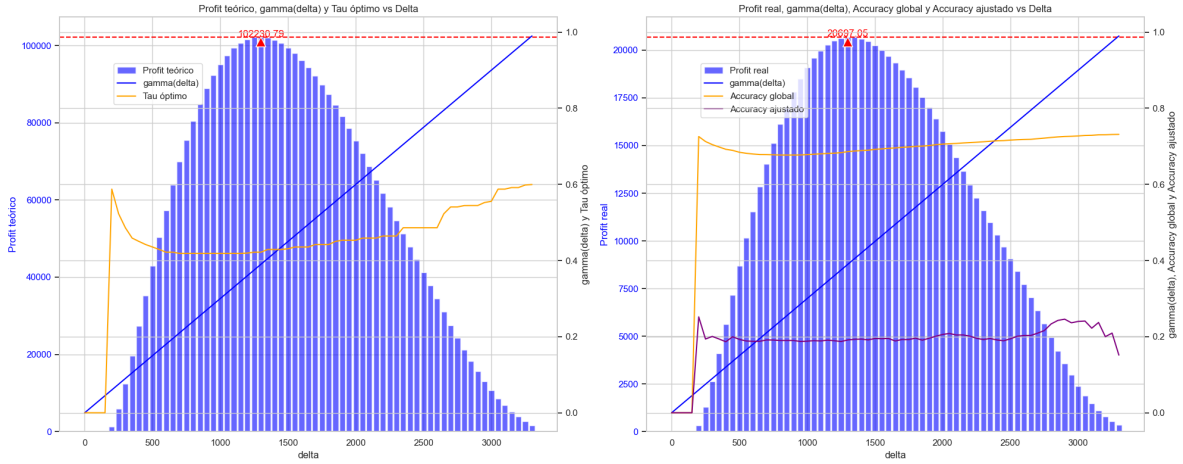
Figura 4.8: Reglas FIS mejoradas para tres valores de K



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$



(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$



(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

Figura 4.9: Evaluación comparativa del beneficio teórico frente al beneficio real en campañas de retención

Las gráficas muestran cómo el beneficio real tiende a ser inferior al teórico debido a que este último asume que todos los clientes contactados aceptan la campaña, mientras que, en la realidad, solo un subconjunto de ellos lo hace. Esto se refleja en las diferencias de magnitud entre las barras de beneficio teórico y real. Además, se menciona que incorporar un costo base generalizado (A) ayuda a explicar estas discrepancias en los valores observados.

La explicación del desajuste entre el beneficio teórico y real es lógica: el beneficio teórico, al asumir que todos los clientes contactados aceptan la campaña, sobreestima el rendimiento, mientras que el beneficio real refleja las fricciones inherentes al comportamiento del cliente.

La inclusión del valor teórico del δ^* en las gráficas, que se representa como una línea horizontal roja, es fundamental para la interpretación de los resultados en el contexto de campañas de retención orientadas a las ganancias. Esto permite comparar directamente el rendimiento teórico con el resultado práctico del experimento, facilitando una evaluación más clara de la efectividad de las estrategias implementadas.

La forma cóncava de la curva de beneficio indica que hay un punto óptimo donde se maximiza el beneficio, el cual representa el umbral estratégico clave para ajustar las estrategias y maximizar el impacto de las campañas, lo que es relevante para la toma de decisiones en el diseño de campañas de retención de clientes.

Además, la inclusión del costo base generalizado y el análisis del δ^* aportan claridad para evaluar la eficiencia de las intervenciones en entornos empresariales dinámicos. Estos hallazgos pueden guiar decisiones informadas sobre la priorización de clientes y el diseño de futuras campañas.

Al observar cómo la línea teórica se alinea con el peak de la curva azul, se puede inferir la eficacia del modelo utilizado y la necesidad de ajustar parámetros para mejorar los resultados en la práctica. Esto puede ayudar a identificar posibles áreas de mejora en las campañas y a optimizar la asignación de recursos.

En resumen, La figura 4.9 resalta la importancia de considerar tanto el beneficio teórico como el real para entender el desempeño real de las intervenciones de retención y obtener una visión más precisa de la efectividad de las campañas de retención para guiar futuras decisiones estratégicas, destacando la relevancia de las métricas de precisión en la evaluación de estas estrategias.

4.3. Relevancia de los resultados

Los resultados obtenidos evidencian que los modelos propuestos en esta investigación abordan problemas críticos en la gestión empresarial. Por un lado, el modelo de optimización integrado mejora la eficiencia en la toma de decisiones empresariales en mercados con productos sustitutos. Comparado con modelos tradicionales, el enfoque desarrollado permite integrar de manera simultánea múltiples dimensiones de decisión, logrando optimizar inventarios y precios en función de restricciones de capacidad y comportamiento probabilístico del mercado. La introducción del método de punto fijo dentro del flujo de optimización refuerza la estabilidad y factibilidad de las soluciones generadas, permitiendo cumplir con restricciones críticas como el balance de almacenamiento. Por otro lado, el modelo de diseño de campañas de retención de clientes basado en un enfoque profit-driven demuestra ciertas mejoras a los enfoques clásicos. A través de la predicción del abandono de clientes utilizando sistemas de inferencia difusa (FIS) tipo Mamdani y una segmentación detallada, se logra personalizar los incentivos de retención considerando el valor de vida del cliente. Además, la integración de estrategias intertemporales permite adaptar las campañas a lo largo del tiempo, mejorando la sostenibilidad y efectividad en condiciones de mercado dinámicas. Ambos modelos superan los enfoques previos en la literatura, al garantizar convergencia incluso en escenarios con alta complejidad no lineal y establecer un marco metodológico que no solo es innovador desde una perspectiva teórica, sino también aplicable en industrias donde la optimización de recursos y la fidelización de clientes son críticos para lograr buenos resultados.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones teóricas y prácticas

Esta tesis presenta los hallazgos derivados de estudios enfocados en la generación de modelos matemáticos de optimización, metodologías de estimación y pronóstico empleando lógica difusa, orientadas a la mejora de la gestión empresarial en contextos multicriterio con limitada disponibilidad de información. En particular, se desarrollan herramientas para apoyar la toma de decisiones: por una parte, se desarrolla una herramienta para optimizar la gestión del stock, la producción y el precio de productos sustitutos, maximizando las utilidades a lo largo del horizonte temporal. Además, representa una contribución innovadora al ofrecer una nueva perspectiva estratégica. Por otra parte, se ofrece a los tomadores de decisiones un modelo que permite el diseño óptimo de campañas para la retención de clientes bajo un enfoque predictivo y profit-driven. El propósito es que los resultados obtenidos enriquezcan las fuentes de información disponibles, proporcionando a los responsables de la toma de decisiones un contexto más amplio para el análisis de información, y así, reducir la incertidumbre inherente a las diversas decisiones empresariales.

La investigación ha demostrado que la implementación de modelos de optimización en la gestión de productos sustitutos permite a las empresas mejorar significativamente su eficiencia operativa. Al integrar decisiones de almacenamiento, producción y fijación de precios, se logra una mejor alineación con las dinámicas del mercado, lo que resulta en una reducción de costos y un aumento en la rentabilidad.

El modelo propuesto se ha mostrado, a través de instancias numéricas, ser adaptable a diferentes escenarios de mercado, lo que permite a las empresas responder de manera efectiva a cambios en la demanda y en las preferencias de los consumidores. Esta flexibilidad es esencial en un entorno empresarial cada vez más dinámico y competitivo. Se ha comprobado que las estrategias de retención de clientes, fundamentadas en análisis de datos y categorización de clientes, son relevantes para maximizar el valor del tiempo de vida del cliente. La capacidad de identificar y abordar las necesidades de los clientes de manera proactiva contribuye a una mayor lealtad y satisfacción, lo que se traduce en un incremento de las utilidades.

En el modelo de retención de clientes, la comparación entre el escenario base, que carece de la correlación entre γ y δ , y el escenario que la incluye, revela una curva de beneficios con una forma casi cóncava, y el enfoque metodológico permite una mejora significativa en el rendimiento de la campaña en términos de precisión. Este incremento destaca el valor añadido de integrar la relación entre γ y δ en el modelo.

Además, entre los escenarios que incorporan esta relación, se observa que el desempeño óptimo del modelo se refleja directamente en un régimen de beneficios más favorable, comprobando la relevancia de la optimización conjunta de *targeting* e incentivo δ del modelo para maximizar el beneficio total.

Es fundamental destacar que los resultados, aunque indican un beneficio inferior a modelos base, esto no refleja una deficiencia del modelo, sino que estima el beneficio en forma realista, teniendo en cuenta consideraciones más precisas y prácticas.

La integración de objetivos combinados con el incentivo δ optimiza las recomendaciones para las variables τ y δ , resultando en un aumento significativo de los beneficios. Esto ejemplifica la efectividad de los enfoques analíticos prescriptivos al demostrar mejoras claras a través de estos esquemas combinados.

La investigación proporciona al estado del arte un marco en que al mejorar la gestión de productos sustitutos y la retención de clientes, las empresas no solo optimizan sus operaciones, sino que también crean un entorno propicio para el crecimiento de sus utilidades, apoyándose en herramientas prácticas e innovadoras que pueden ser implementadas en el contexto empresarial actual para responder a las necesidades del mercado, ofreciendo un enfoque que combina teoría y práctica. Esto abre nuevas vías para futuras investigaciones y aplicaciones en el campo.

5.2. Investigación futura

Indudablemente, este trabajo aborda y resuelve diversas interrogantes, pero además plantea nuevas preguntas que demandan investigaciones adicionales para ser respondidas. En este contexto, esta sección expone una serie de propuestas para futuras investigaciones, las cuales tienen el potencial de complementar, ampliar o enriquecer los hallazgos de la presente investigación.

Considerando la extensión del modelo, se sugiere considerar la inclusión de variables adicionales que reflejen un contexto más realista, como la variabilidad en la demanda estacional, la competencia en el mercado y las tendencias de consumo. Esto podría enriquecer el modelo y hacerlo más robusto ante diferentes escenarios.

Para mejorar la eficiencia del modelo, se recomienda implementar el algoritmo desarrollado utilizando técnicas de paralelización. Esto permitiría ejecutar tareas simultáneamente, reduciendo considerablemente el tiempo requerido para la convergencia del modelo y facilitando su aplicación en tiempo real en entornos empresariales.

Con respecto al diseño de campañas de retención de clientes, uno de los principales desafíos radica en mejorar la máquina utilizada para el modelo conjunto. La aplicación de esquemas modernos de *machine learning*, que han demostrado ser superiores en la predicción, será compleja en este marco. Estimar la condición de β_{i^*} y δ^* con τ^* será todo un desafío porque, a diferencia de un esquema FIS de tipo Mamdani, la mayoría de los esquemas modernos de *machine learning* carecen de una expresión algebraica sencilla. Muchos de estos esquemas funcionan como cajas negras, lo que complica la aplicación directa.

Actualmente estamos desarrollando un esquema de predicción mejorado basado en Logit Multinomial, el cual corresponde a otro tema interesante a investigar. Al igual que en este estudio, el desafío radica en estimar el parámetro K . Estamos abordando esto mediante encuestas y aplicando la estimación de máxima verosimilitud. Este enfoque se recomienda para futuras investigaciones, ya que muestra potencial para refinar la estimación de parámetros y mejorar la precisión del modelo.

Se aconseja llevar a cabo estudios de validación empírica que comparen los resultados del modelo con datos reales de empresas; esto no solo confirmaría la efectividad del modelo, sino que también proporcionaría información valiosa para su ajuste y mejora

continua.

Es fundamental que las empresas que adopten estas herramientas de gestión inviertan en capacitación y formación de su personal. Esto asegurará que los tomadores de decisiones comprendan plenamente el funcionamiento del modelo y puedan aplicarlo de manera efectiva en sus operaciones diarias.

Se recomienda fomentar la investigación continua en el área de gestión de productos sustitutos y retención de clientes, explorando nuevas metodologías y tecnologías emergentes que complementen y mejoren los enfoques actuales. Un enfoque que combine un modelo optimizado de gestión de productos sustitutos con campañas de retención basadas en análisis de datos podría contribuir significativamente a mejorar el desempeño general de las empresas, en términos de rentabilidad y lealtad del cliente.

Esta afirmación se alinea con las tendencias actuales en la investigación de marketing y gestión empresarial. A continuación, se presenta un análisis detallado de esta recomendación desde una perspectiva científica:

1. Interrelación entre gestión de productos sustitutos y retención de clientes: La gestión de productos sustitutos implica la optimización de decisiones relacionadas con la producción, el inventario y la fijación de precios en un entorno competitivo. Al integrar esta gestión con campañas de retención de clientes, se puede crear un enfoque sinérgico que no solo maximiza la utilidad de los productos ofrecidos, sino que también fortalece la lealtad del cliente. La literatura sugiere que la satisfacción del cliente y la percepción de valor son factores críticos que influyen en la lealtad, y un modelo de gestión de productos que considera las preferencias cambiantes de los consumidores puede mejorar significativamente estas métricas.

2. Optimización basada en datos: La utilización del análisis de datos en el diseño de campañas de retención permite una segmentación más precisa y una personalización de las ofertas. Al aplicar técnicas de inferencia difusa y modelos predictivos, como se ha discutido en las hipótesis anteriores, las empresas pueden identificar de manera más efectiva a los clientes en riesgo de abandono y diseñar incentivos que resuenen con sus necesidades y comportamientos. Esto no solo mejora la tasa de retención, sino que también puede influir positivamente en la percepción del cliente sobre la marca, lo que se traduce en una mayor lealtad.

3. Impacto en la rentabilidad: La combinación de una gestión de productos optimizada

y campañas de retención efectivas puede resultar en un aumento significativo de la rentabilidad. Al reducir la tasa de abandono y maximizar el valor del ciclo de vida del cliente (CLV), las empresas pueden mejorar sus márgenes de beneficio. Además, la optimización de la gestión de productos puede llevar a una reducción de costos operativos y a una mejor asignación de recursos, lo que contribuye a una mayor eficiencia económica.

4. Evidencia empírica y teórica: este planteamiento se apoya en una base teórica sólida que sugiere que la lealtad del cliente y la rentabilidad están interrelacionadas. Estudios previos han demostrado que las empresas que implementan estrategias de retención efectivas y que gestionan adecuadamente sus productos sustitutos tienden a experimentar un mejor desempeño financiero. La literatura sobre marketing relacional y gestión de la cadena de suministro respalda esta afirmación, sugiriendo que la integración de estas dos áreas puede resultar en un enfoque más holístico y efectivo para la gestión empresarial.

5. Implicaciones para la investigación futura: La validación del estudio propuesto podría abrir nuevas avenidas de investigación en la intersección de la gestión de productos y la retención de clientes. Se podrían explorar modelos híbridos que integren técnicas de optimización y análisis predictivo, así como el impacto de diferentes estrategias de retención en la gestión de productos en diversos sectores. Además, la consideración de factores contextuales, como la dinámica del mercado y las preferencias del consumidor, podría enriquecer aún más el análisis.

Esta nueva arista de investigación presenta una propuesta valiosa que refleja la complejidad y la interconexión de las decisiones empresariales en el entorno actual. La combinación de un modelo de gestión de productos sustitutos optimizado con campañas de retención de clientes basadas en análisis de datos no solo tiene el potencial de mejorar la rentabilidad, sino que también puede fortalecer la lealtad del cliente, creando un ciclo virtuoso que beneficia a la empresa en su conjunto. Este enfoque integrado es esencial para la sostenibilidad y el crecimiento en un mercado cada vez más competitivo y orientado al cliente.

5.3. Relevancia científica y aplicada

Esta tesis contribuye al avance del conocimiento en optimización empresarial mediante la propuesta de dos modelos integrados que abordan problemas fundamentales en la gestión de inventarios, precios y almacenamiento, así como en el diseño de campañas de retención de clientes:

- a) **Gestión de inventarios, precios y almacenamiento:** Desde la perspectiva del modelo de decisión integrado que aborda simultáneamente inventarios, precios y almacenamiento bajo restricciones de capacidad y demanda probabilística, a diferencia de enfoques tradicionales, el uso combinado de metaheurísticas de optimización por enjambre de partículas (PSO) y el método de punto fijo permite resolver problemas complejos no lineales de manera eficiente y estable.

Desde una perspectiva científica, la metodología propuesta amplía la frontera del conocimiento al introducir un marco replicable que integra modelos de elección discreta y optimización multiobjetivo en un contexto empresarial. Esta contribución establece una base para futuras investigaciones en áreas como la gestión de cadenas de suministro, mercados de bienes sustitutos y estrategias de fijación de precios bajo incertidumbre.

- b) **Retención de clientes:** En el ámbito de la retención de clientes, el modelo *profit-driven* basado en sistemas de inferencia difusa introduce una nueva forma de predecir el abandono de clientes, segmentar óptimamente consumidores y personalizar incentivos. Este enfoque no solo mejora la precisión de las estrategias de retención, sino que también establece un marco adaptable a horizontes temporales, maximizando el valor del cliente y la sostenibilidad de las campañas.

Ambos modelos tienen implicaciones prácticas relevantes para industrias con restricciones críticas de capacidad y competencia intensa, demostrando que la combinación de enfoques probabilísticos, métodos de optimización y estrategias de segmentación puede mejorar la toma de decisiones estratégicas. Estas contribuciones establecen una base para futuras investigaciones en gestión de cadenas de suministro, mercados dinámicos y fidelización de clientes.

Glosario

Optimización multicriterio: Proceso de toma de decisiones que considera múltiples criterios u objetivos. Este enfoque busca soluciones que satisfagan de manera equilibrada todas las metas planteadas.

Lógica difusa: Un enfoque matemático que permite manejar la incertidumbre y la imprecisión en la toma de decisiones, utilizando valores que pueden ser verdaderos en un grado entre 0 y 1, en lugar de solo verdadero o falso.

Toma de decisiones: Proceso mediante el cual se elige una opción entre varias alternativas, considerando diferentes criterios y restricciones.

Inventario: Conjunto de bienes y productos que una empresa tiene en stock, que se utilizan para la producción o venta.

Pricing: Estrategia de fijación de precios de productos o servicios, que busca maximizar los ingresos y la rentabilidad, teniendo en cuenta la demanda del mercado y la competencia.

Lot-sizing: Estrategia de planificación de producción que optimiza la cantidad de productos a fabricar y almacenar, buscando minimizar costos y maximizar beneficios.

Intertemporal: Relacionado con decisiones que afectan a diferentes períodos de tiempo, considerando cómo las decisiones actuales impactan en el futuro.

Productos sustitutos: Bienes o servicios que pueden ser utilizados en lugar de otros, satisfaciendo la misma necesidad del consumidor.

MNL (Modelo logit multinomial): Herramienta estadística que permite analizar decisiones de elección entre múltiples alternativas, considerando la utilidad de cada opción.

CMNL (Modelo logit multinomial Condicionado): Extensión del MNL que incorpora restricciones en el comportamiento del consumidor, mejorando la precisión en la estimación de la demanda.

MWTP (Máxima disposición a pagar): Valor máximo que un consumidor está dispuesto a pagar por un bien o servicio, utilizado para determinar precios óptimos.

Punto fijo: Método matemático utilizado para encontrar soluciones en problemas de optimización, donde se busca un valor que no cambia bajo una función específica.

PSO (Particle Swarm Optimization): Algoritmo de optimización por enjambre de partículas que simula el comportamiento social de grupos de partículas para resolver problemas complejos y encontrar soluciones óptimas.

PSO MAIN: Variante principal del algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas, utilizada para resolver problemas de optimización complejos en diversas aplicaciones.

PSO SUB: Variante secundaria del algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas, que se aplica a problemas específicos o con restricciones particulares.

Demanda probabilística: Modelo que describe la demanda de un producto como una variable aleatoria, donde la cantidad demandada se determina a partir de una distribución de probabilidad.

Demanda estocástica: Modelo que considera la variabilidad y la incertidumbre en la demanda de productos, reflejando el comportamiento impredecible de los consumidores.

Demanda determinista: Modelo de demanda que asume que la cantidad demandada es predecible y se puede calcular con certeza, sin considerar la variabilidad o incertidumbre.

Efectos de sustitución: Cambios en la demanda de un producto que ocurren como resultado de cambios en el precio de productos sustitutos, afectando las decisiones de compra de los consumidores.

Horizonte temporal: Período de tiempo considerado en la planificación y toma de decisiones, que puede influir en la evaluación de resultados y en la estrategia a seguir.

Rentabilidad: Medida de la capacidad de una empresa para generar ganancias en relación con sus costos y gastos, evaluando la eficiencia de sus operaciones.

Campaña de retención: Estrategia diseñada para mantener a los clientes existentes, minimizando la tasa de abandono y maximizando la lealtad y el valor del cliente.

Rotación de personal: Tasa a la que los empleados dejan una organización y son reemplazados por nuevos trabajadores, lo que puede afectar la estabilidad y el rendimiento de la empresa.

Churn: Término que se refiere a la tasa de abandono de clientes, indicando el porcentaje de clientes que dejan de utilizar un servicio o producto en un período determinado.

No-churn: Clientes que permanecen leales a una empresa y continúan utilizando sus productos o servicios, a diferencia de aquellos que abandonan.

Tasa de abandono: Porcentaje de clientes que dejan de utilizar un producto o servicio en un período específico, utilizado para medir la efectividad de las estrategias de retención.

FIS (Fuzzy Inference System): Sistema de inferencia difusa que utiliza lógica difusa para modelar y tomar decisiones basadas en reglas "si-entonces", permitiendo manejar la incertidumbre en los datos.

MISO (Multiple Input Single Output): Sistema que tiene múltiples entradas y una sola salida, utilizado en el contexto de modelado y control en diversas aplicaciones.

Maximización de utilidades: Proceso de optimización que busca aumentar la satisfacción del consumidor a través de la fijación de precios y la oferta de productos.

BSC(Balanced Scorecard): es un marco de gestión estratégica que permite a las organizaciones traducir su visión y estrategia en un conjunto coherente de objetivos y medidas de rendimiento.

DEMATEL (Decision-Making Trial and Evaluation Laboratory): Método utilizado para modelar y analizar relaciones causales entre variables en un sistema, facilitando la toma de decisiones complejas.

Referencias

- Abbasimehr, H., Setak, M., & Soroor, J. (2013). A framework for identification of high-value customers by including social network based variables for churn prediction using neuro-fuzzy techniques. *International Journal of Production Research*, 51(4), 1279–1294.
- Abbasimehr, H., Setak, M., & Tarokh, M. (2011). A neuro-fuzzy classifier for customer churn prediction. *International Journal of Computer Applications*, 19(8), 35–41.
- Acuña-Carvajal, F., Pinto-Tarazona, L., López-Ospina, H., Barros-Castro, R., Quezada, L., & Palacio, K. (2019). An integrated method to plan, structure and validate a business strategy using fuzzy dematel and the balanced scorecard. *Expert systems with applications*, 122, 351–368.
- Adane, B. Y., Hou, J., Peng, B., Ullah, H., & Abate, D. Y. (2023). Determinants of influence factors in crashes alongside an intersection using a multinomial logit approach. *Transportation research record*, 2677(2), 648–660.
- Adeinat, H., Pazhani, S., Mendoza, A., & Ventura, J. A. (2022). Coordination of pricing and inventory replenishment decisions in a supply chain with multiple geographically dispersed retailers. *International Journal of Production Economics*, 248, 108461.
- Ahn, H. (2001). Applying the balanced scorecard concept: an experience report. *Long range planning*, 34(4), 441–461.
- Al-Hashmi, A. A., Tsotsolas, K. K., Fernandez-Marquez, J. L., & Bromuri, S. (2022). Churn prediction in subscription-based services using machine learning. *Expert Systems with Applications*, 205(A), 117724.

- Amin, A., Al-Obeidat, F., Shah, B., Adnan, A., Loo, J., & Anwar, S. (2019). Customer churn prediction in telecommunication industry using data certainty. *Journal of Business Research*, 94, 290–301.
- Asgari, N. & Darestani, S. A. (2017). Application of multi-criteria decision making methods for balanced scorecard: a literature review investigation. *International Journal of Services and Operations Management*, 27(2), 262–283.
- Atiencia, R. J. S. & García, R. A. (2012). Optimización del reabastecimiento de una red de cajeros automáticos con estimación difusa de la demanda. *Revista Tecnológica-ESPOL*, 25(2).
- Atkinson, H. (2006). Strategy implementation: a role for the balanced scorecard? *Management decision*, 44(10), 1441–1460.
- Avinadav, T., Herbon, A., & Spiegel, U. (2014). Optimal ordering and pricing policy for demand functions that are separable into price and inventory age. *International Journal of Production Economics*, 155, 406–417.
- Azeem, M. & Usman, M. (2018). A fuzzy based churn prediction and retention model for prepaid customers in telecom industry. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 11(1), 66–78.
- Backiel, A., Baesens, B., & Claeskens, G. (2016). Predicting time-to-churn of prepaid mobile telephone customers using social network analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 67(9), 1135–1145.
- Bandyopadhyay, S. & Martell, M. (2007). Does attitudinal loyalty influence behavioral loyalty? a theoretical and empirical study. *Journal of retailing and consumer services*, 14(1), 35–44.
- Becker, J. U., Spann, M., & Barrot, C. (2020). Impact of proactive postsales service and cross-selling activities on customer churn and service calls. *Journal of Service Research*, 23(1), 53–69.
- Berumen, S. A. & Llamazares Redondo, F. (2007). La utilidad de los métodos de decisión multicriterio (como el ahp) en un entorno de competitividad creciente. *Cuadernos de administración*, 20(34), 65–87.

- Biazar, J. & Amirteimoori, A. (2006). An improvement to the fixed point iterative method. *Applied mathematics and computation*, 182(1), 567–571.
- Bierlaire, M., Hurtubia, R., & Flötteröd, G. (2010). Analysis of implicit choice set generation using a constrained multinomial logit model. *Transportation Research Record*, 2175(1), 92–97.
- Bigliardi, B. & Bottani, E. (2010). Performance measurement in the food supply chain: a balanced scorecard approach. *Facilities*, 28(5/6), 249–260.
- Bigliardi, B. & Ivo Dormio, A. (2010). A balanced scorecard approach for r&d: evidence from a case study. *Facilities*, 28(5/6), 278–289.
- Bitran, G. R. & Ferrer, J.-C. (2007). On pricing and composition of bundles. *Production and Operations Management*, 16(1), 93–108.
- Bolton, R. N. (1998). A dynamic model of the duration of the customer’s relationship with a continuous service provider: The role of satisfaction. *Marketing science*, 17(1), 45–65.
- Burez, J. & den Poel, D. V. (2009). Handling class imbalance in customer churn prediction. *Expert Systems with Applications*, 36(3), 4626–4636.
- Burwell, T. H., Dave, D. S., Fitzpatrick, K. E., & Roy, M. R. (1997). Economic lot size model for price-dependent demand under quantity and freight discounts. *International Journal of Production Economics*, 48(2), 141–155.
- Cao, Y., Zhao, K., Yang, J., & Xiong, W. (2015). Constructing the integrated strategic performance indicator system for manufacturing companies. *International Journal of Production Research*, 53(13), 4102–4116.
- Cárdenas León, A., Francisco-Javier, P.-P., & Alejandro-Israel, B.-G. (2016). Implementación de sistema difuso en arduino uno. *Academia Journals, Celaya*.
- Cascetta, E. & Papola, A. (2001). Random utility models with implicit availability/perception of choice alternatives for the simulation of travel demand. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 9(4), 249–263.

- Castillo, O., Cervantes, L., Soria, J., Sanchez, M., & Castro, J. R. (2016). A generalized type-2 fuzzy granular approach with applications to aerospace. *Information Sciences*, *354*, 165–177.
- Castillo, O., Melin, P., Ramírez, E., & Soria, J. (2012). Hybrid intelligent system for cardiac arrhythmia classification with fuzzy k-nearest neighbors and neural networks combined with a fuzzy system. *Expert Systems with Applications*, *39*(3), 2947–2955.
- Castro, M., Martínez, F., & Munizaga, M. A. (2013). Estimation of a constrained multinomial logit model. *Transportation*, *40*, 563–581.
- Cervero, A., Castro-Lopez, A., Álvarez-Blanco, L., Esteban, M., & Bernardo, A. (2020). Evaluation of educational quality performance on virtual campuses using fuzzy inference systems. *Plos one*, *15*(5), e0232802.
- Chang, H.-C. (2013). A note on an economic lot size model for price-dependent demand under quantity and freight discounts. *International Journal of Production Economics*, *144*(1), 175–179.
- Chen, F.-H. (2015). Application of a hybrid dynamic mcdm to explore the key factors for the internal control of procurement circulation. *International Journal of Production Research*, *53*(10), 2951–2969.
- Choi, B. & Choi, B.-J. (2014). The effects of perceived service recovery justice on customer affection, loyalty, and word-of-mouth. *European Journal of Marketing*.
- Chytas, P., Glykas, M., & Valiris, G. (2011). A proactive balanced scorecard. *International Journal of Information Management*, *31*(5), 460–468.
- Coussement, K. (2014a). Improving customer retention management through cost-sensitive learning. *European Journal of Marketing*, *48*(3/4), 477–495.
- Coussement, K. (2014b). Improving customer retention management through cost-sensitive learning. *European Journal of Marketing*, *48*(3/4), 477–495.
- Coussement, K., Benoit, D. F., & Van den Poel, D. (2010). Improved marketing decision making in a customer churn prediction context using generalized additive models. *Expert systems with Applications*, *37*(3), 2132–2143.

- Coussement, K., Lessmann, S., & Verstraeten, G. (2017a). A comparative analysis of data preparation algorithms for customer churn prediction: A case study in the telecommunication industry. *Decision Support Systems*, 95, 27–36.
- Coussement, K., Lessmann, S., & Verstraeten, G. (2017b). A comparative analysis of data preparation algorithms for customer churn prediction: A case study in the telecommunication industry. *Decision Support Systems*, 95, 27–36.
- Dalalah, D., Hayajneh, M., & Batieha, F. (2011). A fuzzy multi-criteria decision making model for supplier selection. *Expert systems with applications*, 38(7), 8384–8391.
- De Caigny, A., Coussement, K., & De Bock, K. W. (2018). A new hybrid classification algorithm for customer churn prediction based on logistic regression and decision trees. *European Journal of Operational Research*, 269(2), 760–772.
- De Caigny, A., Coussement, K., De Bock, K. W., & Lessmann, S. (2020). Incorporating textual information in customer churn prediction models based on a convolutional neural network. *International Journal of Forecasting*, 36(4), 1563–1578.
- Devos, A., Dhondt, J., Stripling, E., Baesens, B., vanden Broucke, S., & Sukhatme, G. (2018). Profit maximizing logistic regression modeling for credit scoring. In *2018 IEEE Data Science Workshop (DSW)*, (pp. 125–129). IEEE.
- Dick, A. S. & Basu, K. (1994). Customer loyalty: toward an integrated conceptual framework. *Journal of the academy of marketing science*, 22(2), 99–113.
- Dong, L., Kouvelis, P., & Tian, Z. (2009). Dynamic pricing and inventory control of substitute products. *Manufacturing & Service Operations Management*, 11(2), 317–339.
- Du, Z. (2013). *Intelligence computation and evolutionary computation*. Springer.
- Dubreil, H., Altman, Z., Diascorn, V., Picard, J.-M., & Clerc, M. (2005). Particle swarm optimization of fuzzy logic controller for high quality rrm auto-tuning of umts networks. In *2005 IEEE 61st Vehicular Technology Conference*, volume 3, (pp. 1865–1869). IEEE.

- Eftimov, L., Trpeski, P., Gockov, G., & Vasileva, V. (2016). Designing a balanced scorecard as strategic management system for higher education institutions: A case study in macedonia. *Ekonomika*, 62(2), 29.
- Engelbrecht, A. P. (2006). *Fundamentals of computational swarm intelligence*. John Wiley & Sons, Inc.
- Ernesto Quezada and, L., Ivan Palominos, P., E. Galleguillos, R., & H. Olmedo, A. (2014). A method for generating strategy maps using anp. *Journal of Manufacturing Technology Management*, 25(8), 1090–1104.
- Eschenauer, H., Koski, J., & Osyczka, A. (2012). *Multicriteria design optimization: procedures and applications*. Springer Science & Business Media.
- Farhangi, A., Far, M., Mahaki, A., & Danaei, A. (2002). Strategic planning in media organizations of iran. *Management Science Letters*, 2(2), 477–496.
- Fernández, A. (2001). El balanced scorecard ayudando a implementar la estrategia. *Revista de antiguos alumnos del IESE*.
- Fontela, E. & Gabus, A. (1976). The dematel observer.
- Gallego, J., Rubalcaba, L., & Hipp, C. (2013). Services and organisational innovation: the right mix for value creation. *Management Decision*, 51(6), 1117–1134.
- García, D. L., Nebot, À., & Vellido, A. (2017). Intelligent data analysis approaches to churn as a business problem: a survey. *Knowledge and Information Systems*, 51(3), 719–774.
- Geramian, A. & Abraham, A. (2021). Customer classification: A mamdani fuzzy inference system standpoint for modifying the failure mode and effect analysis based three dimensional approach. *Expert Systems with Applications*, 186, 115753.
- Geramian, A., Abraham, A., & Ahmadi Nozari, M. (2019). Fuzzy logic-based finea robust design: a quantitative approach for robustness against groupthink in group/team decision-making. *International Journal of Production Research*, 57(5), 1331–1344.

- Geramian, A., Mehregan, M. R., Mokhtarzadeh, N. G., & Hemmati, M. (2017). Fuzzy inference system application for failure analyzing in automobile industry. *International Journal of Quality & Reliability Management*.
- Geramian, A., Shahin, A., Minaei, B., & Antony, J. (2020). Enhanced fmea: An integrative approach of fuzzy logic-based fmea and collective process capability analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 71(5), 800–812.
- Gerpott, T. J., Rams, W., & Schindler, A. (2001). Customer retention, loyalty, and satisfaction in the german mobile cellular telecommunications market. *Telecommunications policy*, 25(4), 249–269.
- Ghani, U., Bajwa, I. S., & Ashfaq, A. (2018). A fuzzy logic based intelligent system for measuring customer loyalty and decision making. *Symmetry*, 10(12), 761.
- Ghasemy Yaghin, R., Fatemi Ghomi, S., & Torabi, S. (2014). Enhanced joint pricing and lotsizing problem in a two-echelon supply chain with logit demand function. *International Journal of Production Research*, 52(17), 4967–4983.
- Gordini, N. & Veglio, V. (2017). Customers churn prediction and marketing retention strategies. an application of support vector machines based on the auc parameter-selection technique in b2b e-commerce industry. *Industrial Marketing Management*, 62, 100–107.
- Güler, M. G. (2013). The value of modeling with reference effects in stochastic inventory and pricing problems. *Expert systems with applications*, 40(16), 6593–6600.
- Güler, M. G., Bilgiç, T., & Güllü, R. (2014). Joint inventory and pricing decisions with reference effects. *IIE Transactions*, 46(4), 330–343.
- Hair, J. (2014). Re anderson, rl tatham and wc black, 1995, multivariate data analysis.
- Herrera, F., Lozano, M., & Verdegay, J. L. (1998). Tackling real-coded genetic algorithms: Operators and tools for behavioural analysis. *Artificial intelligence review*, 12, 265–319.

- Heydariyeh, S., Javidnia, M., & Mehdiabadi, A. (2012). A new approach to analyze strategy map using an integrated bsc and fuzzy dematel. *Management Science Letters*, 2(1), 161–170.
- Hintze, S. (2015). Value chain marketing. *Springer: London. International Journal of Innovation, Management and Technology*, 7(5), 228–233.
- Höppner, S., Stripling, E., Baesens, B., vanden Broucke, S., & Verdonck, T. (2020). Profit driven decision trees for churn prediction. *European journal of operational research*, 284(3), 920–933.
- Huang, H.-C., Lai, M.-C., & Lin, L.-H. (2011). Developing strategic measurement and improvement for the biopharmaceutical firm: Using the bsc hierarchy. *Expert Systems with Applications*, 38(5), 4875–4881.
- Hwang, C.-L., Yoon, K., Hwang, C.-L., & Yoon, K. (1981). Methods for multiple attribute decision making. *Multiple attribute decision making: methods and applications a state-of-the-art survey*, 58–191.
- Imran, M., Agha, M. H., Ahmed, W., Sarkar, B., & Ramzan, M. B. (2020). Simultaneous customers and supplier’s prioritization: an ahp-based fuzzy inference decision support system (ahp-fidss). *International Journal of Fuzzy Systems*, 22, 2625–2651.
- Ishizaka, A. & Nemery, P. (2013). *Multi-criteria decision analysis: methods and software*. John Wiley & Sons.
- Jaberipour, M., Khorram, E., & Karimi, B. (2011). Particle swarm algorithm for solving systems of nonlinear equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(2), 566–576.
- Jassbi, J., Mohamadnejad, F., & Nasrollahzadeh, H. (2011). A fuzzy dematel framework for modeling cause and effect relationships of strategy map. *Expert systems with Applications*, 38(5), 5967–5973.
- Juang, C.-F., Chang, C.-W., & Hung, T.-H. (2021). Hand palm tracking in monocular images by fuzzy rule-based fusion of explainable fuzzy features with robot imitation application. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29(12), 3594–3606.

- Kang, Y. K., Kim, H., Heo, G., & Song, S. Y. (2017). Diagnosis of feedwater heater performance degradation using fuzzy inference system. *Expert Systems with Applications*, 69, 239–246.
- Kaplan, R. & Norton, D. (2000). Cuadro de mando integral. the balanced scorecard. barcelona (españa). *Gestión*, 2.
- Kaplan, R. S. & David, P. (1996). Norton, the balanced scorecard: Translating strategy into action. *Harvard Business Review Press*, 1.
- Kaplan, R. S. & Norton, D. P. (1992). The balanced scorecard: measures that drive performance. *Harvard Business Review*, 70(1), 71–79.
- Kaplan, R. S. & Norton, D. P. (2001a). Transforming the balanced scorecard from performance measurement to strategic management: Part 1. *Accounting horizons*, 15(1), 87–104.
- Kaplan, R. S. & Norton, D. P. (2001b). Transforming the balanced scorecard from performance measurement to strategic management: Part ii. *Accounting horizons*, 15(2), 147–160.
- Kaplan, R. S. & Norton, D. P. (2004). *Strategy maps: Converting intangible assets into tangible outcomes*. Harvard Business Press.
- Kaplan, R. S. & Norton, D. P. (2007). Usar el balanced scorecard como un sistema de gestión estratégica. *Harvard Business Review*, 1, 75–85.
- Kaplan, R. S., Norton, D. P., et al. (2000). Having trouble with your strategy? then map it. *Focusing Your Organization on Strategy—with the Balanced Scorecard*, 49(5), 167–176.
- Karimi, B., Ghomi, S. F., & Wilson, J. (2003). The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, 31(5), 365–378.
- Kennedy, J. & Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks*, volume 4, (pp. 1942–1948). ieee.

- Keramati, A., Ghaneei, H., & Mirmohammadi, S. M. (2020). Investigating factors affecting customer churn in electronic banking and developing solutions for retention. *International Journal of Electronic Banking*, 2(3), 185–204.
- Kilichev, D. & Kim, W. (2023). Hyperparameter optimization for 1d-cnn-based network intrusion detection using ga and pso. *Mathematics*, 11(17), 3724.
- Kim, G. J., Kim, Y.-O., & Reed, P. M. (2021). Improving the robustness of reservoir operations with stochastic dynamic programming. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 147(7), 04021030.
- Kozak, J., Kania, K., Juszczuk, P., & Mitreġa, M. (2021). Swarm intelligence goal-oriented approach to data-driven innovation in customer churn management. *International Journal of Information Management*, 60, 102357.
- Kunc, M. (2008). Using systems thinking to enhance strategy maps. *Management Decision*, 46(5), 761–778.
- Kuo, M.-S. & Liang, G.-S. (2011). A novel hybrid decision-making model for selecting locations in a fuzzy environment. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(1-2), 88–104.
- Kuo, Y.-H. & Kusiak, A. (2019). From data to big data in production research: the past and future trends. *International Journal of Production Research*, 57(15-16), 4828–4853.
- Lee, W.-S., Huang, A. Y., Chang, Y.-Y., & Cheng, C.-M. (2011). Analysis of decision making factors for equity investment by dematel and analytic network process. *Expert Systems with Applications*, 38(7), 8375–8383.
- Lee, Y.-C., Li, M.-L., Yen, T.-M., & Huang, T.-H. (2011). Analysis of fuzzy decision making trial and evaluation laboratory on technology acceptance model. *Expert systems with applications*, 38(12), 14407–14416.
- Lemmens, A. & Gupta, S. (2020). Managing churn to maximize profits. *Marketing Science*, 39(5), 956–973.

- Lin, C. & Wu, W.-W. (2004). A fuzzy extension of the dematel method for group decision making. *European journal of operational research*, 156(1), 445–455.
- Lin, C.-J. & Wu, W.-W. (2008). A causal analytical method for group decision-making under fuzzy environment. *Expert Systems with Applications*, 34(1), 205–213.
- Liu, H.-C., Liu, L., & Liu, N. (2013). Risk evaluation approaches in failure mode and effects analysis: A literature review. *Expert systems with applications*, 40(2), 828–838.
- Liu, Z., Gao, R., Zhou, C., & Ma, N. (2019). Two-period pricing and strategy choice for a supply chain with dual uncertain information under different profit risk levels. *Computers & Industrial Engineering*, 136, 173–186.
- López-Ospina, H., Agudelo-Bernal, Á., Reyes-Muñoz, L., Zambrano-Rey, G., & Pérez, J. (2021). Design of a location and transportation optimization model including quality of service using constrained multinomial logit. *Applied Mathematical Modelling*, 89, 428–453.
- López-Ospina, H., Pardo, D., Rojas, A., Barros-Castro, R., Palacio, K., & Quezada, L. (2022). A revisited fuzzy dematel and optimization method for strategy map design under the bsc framework: selection of objectives and relationships. *Soft Computing*, 26(14), 6619–6644.
- López-Ospina, H., Quezada, L. E., Barros-Castro, R. A., Gonzalez, M. A., & Palominos, P. I. (2017). A method for designing strategy maps using dematel and linear programming. *Management decision*, 55(8), 1802–1823.
- Lüer-Villagra, A. & Marianov, V. (2013). A competitive hub location and pricing problem. *European journal of operational research*, 231(3), 734–744.
- Madzík, P. & Shahin, A. (2020). Customer categorization using a three-dimensional loyalty matrix analogous to fmea. *International Journal of Quality & Reliability Management*.
- MahmoumGonbadi, A., Katebi, Y., & Doniavi, A. (2019). A generic two-stage fuzzy inference system for dynamic prioritization of customers. *Expert Systems with Applications*, 131, 240–253.

- Majumder, M. (2015). *Impact of urbanization on water shortage in face of climatic aberrations*. Springer.
- Maldonado, S., Domínguez, G., Olaya, D., & Verbeke, W. (2021). Profit-driven churn prediction for the mutual fund industry: a multisegment approach. *Omega*, 100, 102380.
- Maldonado, S., Flores, Á., Verbraken, T., Baesens, B., & Weber, R. (2015). Profit-based feature selection using support vector machines—general framework and an application for customer retention. *Applied Soft Computing*, 35, 740–748.
- Maldonado, S., López, J., & Vairetti, C. (2020). Profit-based churn prediction based on minimax probability machines. *European Journal of Operational Research*, 284(1), 273–284.
- Malesios, C., Skouloudis, A., Dey, P. K., Abdelaziz, F. B., Kantartzis, A., & Evangelinos, K. (2018). Impact of small-and medium-sized enterprises sustainability practices and performance on economic growth from a managerial perspective: Modeling considerations and empirical analysis results. *Business strategy and the environment*, 27(7), 960–972.
- Malina, M. A. & Selto, F. H. (2001). Communicating and controlling strategy: an empirical study of the effectiveness of the balanced scorecard. *Journal of management accounting research*, 13(1), 47–90.
- Manzoor, A., Qureshi, M. A., Kidney, E., & Longo, L. (2024). A review on machine learning methods for customer churn prediction and recommendations for business practitioners. *IEEE Access*.
- Martínez, F., Aguila, F., & Hurtubia, R. (2009). The constrained multinomial logit: A semi-compensatory choice model. *Transportation Research Part B: Methodological*, 43(3), 365–377.
- Martínez, F. & Donoso, P. (2010). The mussa ii land use auction equilibrium model. In *Residential location choice: Models and applications* (pp. 99–113). Springer.

- Martínez, F. & Hurtubia, R. (2006). Dynamic model for the simulation of equilibrium status in the land use market. *Networks and spatial economics*, 6, 55–73.
- Martinez, F. J., Tamblay, L., & Weintraub, A. (2011). School locations and vacancies: a constrained logit equilibrium model. *Environment and Planning A*, 43(8), 1853–1874.
- Mascarenhas, O. A., Kesavan, R., & Bernacchi, M. (2006). Lasting customer loyalty: a total customer experience approach. *Journal of consumer marketing*, 23(7), 397–405.
- Meyer-Waarden, L. (2008). The influence of loyalty programme membership on customer purchase behaviour. *European Journal of marketing*, 42(1/2), 87–114.
- Miettinen, K. (1999). *Nonlinear multiobjective optimization*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- Miguéis, V. L., Van den Poel, D., Camanho, A. S., & e Cunha, J. F. (2012). Modeling partial customer churn: On the value of first product-category purchase sequences. *Expert systems with applications*, 39(12), 11250–11256.
- Millonas, M. (1994). Swarms, phase transitions, and collective intelligence. *Proc. Artificial Life*.
- Mitkees, I. M., Badr, S. M., & ElSeddawy, A. I. B. (2017). Customer churn prediction model using data mining techniques. In *2017 13th International Computer Engineering Conference (ICENCO)*, (pp. 262–268). IEEE.
- Mondadori, J. A. P. & de Melo Bezerra, J. (2018). Fostering collaboration on decision processes. In *ICEIS (1)*, (pp. 569–576).
- Montazeri-Gh, M. & Yazdani, S. (2020). Application of interval type-2 fuzzy logic systems to gas turbine fault diagnosis. *Applied Soft Computing*, 96, 106703.
- Moraga, J. A., Quezada, L. E., Palominos, P. I., Oddershede, A. M., & Silva, H. A. (2020). A quantitative methodology to enhance a strategy map. *International Journal of Production Economics*, 219, 43–53.
- Munda, G. et al. (2008). *Social multi-criteria evaluation for a sustainable economy*, volume 17. Springer.

- Munier, N., Hontoria, E., & Jiménez-Sáez, F. (2019). *Strategic approach in multi-criteria decision making*, volume 275. Springer.
- Narayandas, D. (2005). Building loyalty in business markets. *harvard business review*, 83(9), 131–139.
- Nath, S. V. & Behara, R. S. (2003). Customer churn analysis in the wireless industry: A data mining approach. In *Proceedings-annual meeting of the decision sciences institute*, volume 561, (pp. 505–510).
- Neslin, S. A., Gupta, S., Kamakura, W., Lu, J., & Mason, C. H. (2006). Defection detection: Measuring and understanding the predictive accuracy of customer churn models. *Journal of marketing research*, 43(2), 204–211.
- Oehlmann, M., Glenk, K., Lloyd-Smith, P., & Meyerhoff, J. (2021). Quantifying landscape externalities of renewable energy development: Implications of attribute cut-offs in choice experiments. *Resource and Energy Economics*, 65, 101240.
- Oliver, R. L. (1999). Whence consumer loyalty? *Journal of marketing*, 63(4_suppl1), 33–44.
- Olson, D. L. & Chae, B. K. (2012). Direct marketing decision support through predictive customer response modeling. *Decision Support Systems*, 54(1), 443–451.
- Olson, E. M. & Slater, S. F. (2002). The balanced scorecard, competitive strategy, and performance. *Business Horizons*, 45(3), 11–16.
- Ontiveros-Robles, E., Castillo, O., & Melin, P. (2020). An approach for non-singleton generalized type-2 fuzzy classifiers. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 39(5), 7203–7215.
- Ontiveros-Robles, E. & Melin, P. (2020). Toward a development of general type-2 fuzzy classifiers applied in diagnosis problems through embedded type-1 fuzzy classifiers. *Soft Computing*, 24(1), 83–99.
- Óskarsdóttir, M., Baesens, B., & Vanthienen, J. (2018). Profit-based model selection for customer retention using individual customer lifetime values. *Big data*, 6(1), 53–65.

- Othman, R. (2006). Balanced scorecard and causal model development: preliminary findings. *Management Decision*, 44(5), 690–702.
- Page, K., Pérez, J., Telha, C., Garcia-Echalar, A., & Lopez-Ospina, H. (2021). Optimal bundle composition in competition for continuous attributes. *European Journal of Operational Research*, 293(3), 1168–1187.
- Papa, A., Shemet, Y., & Yarovyi, A. (2021). Analysis of fuzzy logic methods for forecasting customer churn. *Technology audit and production reserves*, 1(2), 57.
- Parsopoulos, K. E. & Vrahatis, M. N. (2010). Particle swarm optimization and intelligence: advances and applications. *Advances in Computational Intelligence and Learning*, 1, 77–108.
- Passino, K. (1998). Fuzzy control. *Addition Wesley*.
- Pérez, J. & López-Ospina, H. (2022). Competitive pricing for multiple market segments considering consumers’ willingness to pay. *Mathematics*, 10(19), 3600.
- Pérez, J. M. (2010). *Inteligencia computacional inspirada en la vida*, volume 36. Servicio Publicaciones UMA.
- Pérez, J., Lopez-Ospina, H., Cataldo, A., & Ferrer, J.-C. (2016). Pricing and composition of bundles with constrained multinomial logit. *International Journal of Production Research*, 54(13), 3994–4007.
- Qin, J., Xi, Y., & Pedrycz, W. (2020). Failure mode and effects analysis (fmea) for risk assessment based on interval type-2 fuzzy evidential reasoning method. *Applied Soft Computing*, 89, 106134.
- Quezada, L. E., Aguilera, D. E., Palominos, P. I., & Oddershede, A. M. (2022). An anp model to generate performance indicators for manufacturing firms under a balanced scorecard approach. *Engineering Management Journal*, 34(1), 70–84.
- Quezada, L. E., Cordova, F. M., Palominos, P., Godoy, K., & Ross, J. (2009). Method for identifying strategic objectives in strategy maps. *International Journal of Production Economics*, 122(1), 492–500.

- Quezada, L. E. & López-Ospina, H. A. (2014). A method for designing a strategy map using ahp and linear programming. *International Journal of Production Economics*, 158, 244–255.
- Quezada, L. E., López-Ospina, H. A., Ortiz, C., Oddershede, A. M., Palominos, P. I., & Jofré, P. A. (2022). A dematel-based method for prioritizing strategic projects using the perspectives of the balanced scorecard. *International Journal of Production Economics*, 249, 108518.
- Quezada, L. E., López-Ospina, H. A., Palominos, P. I., & Oddershede, A. M. (2018). Identifying causal relationships in strategy maps using anp and dematel. *Computers & Industrial Engineering*, 118, 170–179.
- Quezada, L. E., Palominos, P. I., & Gonzalez, M. A. (2013). Application of ahp in the design of a strategy map. *I-Business*, 5(3B), 133.
- Quezada, L. E. & Quinteros, D. (2011). Quantitative model for the design of a strategy map. In *21st International Conference on Production Research: Innovation in Product and Production, ICPR 2011*. Fraunhofer-Verlag.
- Rahimnia, F. & Kargozar, N. (2016). Objectives priority in university strategy map for resource allocation. *Benchmarking: An International Journal*, 23(2), 371–387.
- Reichheld, F. F. (2003). The one number you need to grow. *Harvard business review*, 81(12), 46–55.
- Reisdorfer, V. K., Ribeiro, A. A., & Scaramussa, S. A. (2010). The contribution of the balanced scorecard as a strategic management tool in management support. *Visión de futuro*, 13(1), 83–94.
- Robert, S. (1992). The balanced scorecard: measures that drive performance. *Harvard business review*, 70(1), 71–79.
- Romero, C. (1996). *Análisis de las decisiones multicriterio*, volume 14. Isdefe Madrid.
- Rosário, A. T. & Dias, J. C. (2022). Fuzzy logic: An application into marketing strategy.

- Routh, P., Roy, A., & Meyer, J. (2021). Estimating customer churn under competing risks. *Journal of the Operational Research Society*, 72(5), 1138–1155.
- Ruan, D. (2012). *Fuzzy logic foundations and industrial applications*, volume 8. Springer Science & Business Media.
- Sabri, N., Aljunid, S., Salim, M., Badlishah, R., Kamaruddin, R., & Malek, M. (2013). Fuzzy inference system: Short review and design. *Int. Rev. Autom. Control*, 6(4), 441–449.
- Sharma, M., Singh, D., Tyagi, M., Saini, A., Dhiman, N., & Garg, R. (2022). Employee retention and attrition analysis: A novel approach on attrition prediction using fuzzy inference and ensemble machine learning. *Webology*, 19(2).
- Shi, Y. et al. (2001). Particle swarm optimization: developments, applications and resources. In *Proceedings of the 2001 congress on evolutionary computation (IEEE Cat. No. 01TH8546)*, volume 1, (pp. 81–86). IEEE.
- Shih, H.-C., Hsu, Y.-T., & Lai, Y.-C. R. (2024). Modeling non-compensatory strategies on path choices in a complex urban rail transit network considering characteristics of transfer passengers and trips. *Travel Behaviour and Society*, 35, 100733.
- Smail, G. & Weijia, J. (2017). Techno-economic analysis and prediction for the deployment of 5g mobile network. In *2017 20th Conference on innovations in clouds, internet and networks (ICIN)*, (pp. 9–16). IEEE.
- Smaili, M. Y. & Hachimi, H. (2020). Metaheuristic for optimizing targeted offers in direct marketing. In *2020 IEEE 6th International Conference on Optimization and Applications (ICOA)*, (pp. 1–5). IEEE.
- Smith, N. R., Limón Robles, J., & Cardenas-Barron, L. E. (2009). Optimal pricing and production master planning in a multiperiod horizon considering capacity and inventory constraints. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009(1), 932676.
- Statnikov, R. B. & Matusov, J. B. (2012). *Multicriteria optimization and engineering*. Springer Science & Business Media.

- Stripling, E., vanden Broucke, S., Antonio, K., Baesens, B., & Snoeck, M. (2015). Profit maximizing logistic regression modeling for customer churn prediction. In *2015 IEEE International Conference on Data Science and Advanced Analytics (DSAA)*, (pp. 1–10). IEEE.
- Stripling, E., vanden Broucke, S., Antonio, K., Baesens, B., & Snoeck, M. (2018). Profit maximizing logistic model for customer churn prediction using genetic algorithms. *Swarm and Evolutionary Computation*, *40*, 116–130.
- Swait, J. & Adamowicz, W. (2001). The influence of task complexity on consumer choice: a latent class model of decision strategy switching. *Journal of Consumer Research*, *28*(1), 135–148.
- Taleizadeh, A. A., Hazarkhani, B., & Moon, I. (2020). Joint pricing and inventory decisions with carbon emission considerations, partial backordering and planned discounts. *Annals of Operations Research*, *290*, 95–113.
- Tamaddoni, A., Stakhovych, S., & Ewing, M. (2017). The impact of personalised incentives on the profitability of customer retention campaigns. *Journal of marketing management*, *33*(5-6), 327–347.
- Tanford, S. & Baloglu, S. (2013). Applying the loyalty matrix to evaluate casino loyalty programs. *Cornell Hospitality Quarterly*, *54*(4), 333–346.
- Tang, L., Thomas, L., Fletcher, M., Pan, J., & Marshall, A. (2014). Assessing the impact of derived behavior information on customer attrition in the financial service industry. *European Journal of Operational Research*, *236*(2), 624–633.
- Tavana, M., Mousavi, H., Nasr, A. K., & Mina, H. (2021). A fuzzy weighted influence non-linear gauge system with application to advanced technology assessment at nasa. *Expert Systems with Applications*, *182*, 115274.
- Terzi, M., Ouazene, Y., Yalaoui, A., & Yalaoui, F. (2023). Lot-sizing and pricing decisions under attraction demand models and multi-channel environment: New efficient formulations. *Operations Research Perspectives*, *10*, 100269.
- Thakkar, J. J. (2021). *Multi-criteria decision making*, volume 336. Springer.

- Thomas, J. (1970). Price-production decisions with deterministic demand. *Management Science*, 16(11), 747–750.
- Tseng, M.-L. (2010). Implementation and performance evaluation using the fuzzy network balanced scorecard. *Computers & Education*, 55(1), 188–201.
- Tusell, F. (1999). *Análisis multivariante*. F. Tusell.
- Tzeng, G.-H., Chiang, C.-H., & Li, C.-W. (2007). Evaluating intertwined effects in e-learning programs: A novel hybrid mcdm model based on factor analysis and dematel. *Expert systems with Applications*, 32(4), 1028–1044.
- Uner, M. M., Guven, F., & Cavusgil, S. T. (2020). Churn and loyalty behavior of turkish digital natives: Empirical insights and managerial implications. *Telecommunications Policy*, 44(4), 101901.
- Valmohammadi, C. & Sofiyabadi, J. (2015). Modeling cause and effect relationships of strategy map using fuzzy dematel and fourth generation of balanced scorecard. *Benchmarking: An International Journal*, 22(6), 1175–1191.
- Van Den Bergh, F. (2001). *An analysis of particle swarm optimizers*. University of Pretoria (South Africa).
- Van den Bulte, C., Bayer, E., Skiera, B., & Schmitt, P. (2018). How customer referral programs turn social capital into economic capital. *Journal of Marketing Research*, 55(1), 132–146.
- Verbeke, W., Martens, D., Mues, C., & Baesens, B. (2011a). Building comprehensible customer churn prediction models with advanced rule induction techniques. *Expert Systems with Applications*, 38(3), 2354–2364.
- Verbeke, W., Martens, D., Mues, C., & Baesens, B. (2011b). Building comprehensible customer churn prediction models with advanced rule induction techniques. *Expert Systems with Applications*, 38(3), 2354–2364.
- Verbraken, T., Verbeke, W., & Baesens, B. (2012). A novel profit maximizing metric for measuring classification performance of customer churn prediction models. *IEEE transactions on knowledge and data engineering*, 25(5), 961–973.

- Vo, N. N., Liu, S., Li, X., & Xu, G. (2021). Leveraging unstructured call log data for customer churn prediction. *Knowledge-Based Systems*, 212, 106586.
- Wagner, H. M. & Whitin, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management science*, 5(1), 89–96.
- Wang, C., Yang, C., & Zhang, T. (2023). Order planning with an outsourcing strategy for a make-to-order/make-to-stock production system using particle swarm optimization with a self-adaptive genetic operator. *Computers & Industrial Engineering*, 182, 109420.
- Wang, D., Tan, D., & Liu, L. (2018). Particle swarm optimization algorithm: an overview. *Soft computing*, 22(2), 387–408.
- Wang, L.-X. (1996). *A course in fuzzy systems and control*. Prentice-Hall, Inc.
- Wątróbski, J., Jankowski, J., Ziemia, P., Karczmarczyk, A., & Ziolo, M. (2019). Generalised framework for multi-criteria method selection. *Omega*, 86, 107–124.
- Wei, C.-P. & Chiu, I.-T. (2002). Turning telecommunications call details to churn prediction: a data mining approach. *Expert systems with applications*, 23(2), 103–112.
- Wieseke, J., Alavi, S., & Habel, J. (2014). Willing to pay more, eager to pay less: The role of customer loyalty in price negotiations. *Journal of Marketing*, 78(6), 17–37.
- Wu, H.-Y. (2012). Constructing a strategy map for banking institutions with key performance indicators of the balanced scorecard. *Evaluation and program planning*, 35(3), 303–320.
- Wu, H.-Y., Lin, Y.-K., & Chang, C.-H. (2011). Performance evaluation of extension education centers in universities based on the balanced scorecard. *Evaluation and Program Planning*, 34(1), 37–50.
- Wu, W.-W. & Lee, Y.-T. (2007). Developing global managers’ competencies using the fuzzy dematel method. *Expert systems with applications*, 32(2), 499–507.

- Xie, Y., Li, X., Ngai, E., & Ying, W. (2009). Customer churn prediction using improved balanced random forests. *Expert Systems with Applications*, 36(3), 5445–5449.
- Xue, H., Ding, D., Zhang, Z., Wu, M., & Wang, H. (2021). A fuzzy system of operation safety assessment using multimodel linkage and multistage collaboration for in-wheel motor. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30(4), 999–1013.
- Xue, M., Tang, W., & Zhang, J. (2016). Optimal dynamic pricing for deteriorating items with reference-price effects. *International Journal of Systems Science*, 47(9), 2022–2031.
- Yazıcı, K., Gökler, S. H., & Boran, S. (2021). An integrated smed-fuzzy finea model for reducing setup time. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 32(6), 1547–1561.
- Yu, X., Guo, S., Guo, J., & Huang, X. (2011). An extended support vector machine forecasting framework for customer churn in e-commerce. *Expert Systems with Applications*, 38(3), 1425–1430.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- Zambrano-Rey, G., López-Ospina, H., & Pérez, J. (2019). Retail store location and pricing within a competitive environment using constrained multinomial logit. *Applied Mathematical Modelling*, 75, 521–534.
- Zanon, L. G., Arantes, R. F. M., Calache, L. D. D. R., & Carpinetti, L. C. R. (2020). A decision making model based on fuzzy inference to predict the impact of scor® indicators on customer perceived value. *International Journal of Production Economics*, 223, 107520.
- Zdziebko, T., Sulikowski, P., Sałabun, W., Przybyła-Kasperek, M., & Bąk, I. (2024). Optimizing customer retention in the telecom industry: A fuzzy-based churn modeling with usage data. *Electronics*, 13(3), 469.
- Zhang, J.-L., Chen, J., & Lee, C.-Y. (2008). Joint optimization on pricing, promotion and inventory control with stochastic demand. *International Journal of Production Economics*, 116(2), 190–198.

- Zhang, R. & Zhu, L. (2016). Curbside parking pricing in a city centre using a threshold. *Transport Policy*, 52, 16–27.
- Zhang, W., Yu, C., & Zhong, R. Y. (2023). Stability measure for prefab balancing in prefabrication construction supply chain management. *Computers & Industrial Engineering*, 183, 109518.
- Zheng, L., Gao, T., Meng, L., Ding, T., & Chen, W. (2024). Research on the route choice behavior of urban freight vehicles based on gps data. *Mathematics*, 12(2), 291.

Apéndice A

Implementación metodología PSO al modelo matemático

A.1. Pasos para la implementación del algoritmo PSO

Inicialmente, se aplica la metodología de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) para optimizar los valores de producción y precio para cada ítem durante el período de estudio. En cada iteración del PSO, con producción y precio fijos, se calcula el óptimo de la cantidad almacenada mediante las ecuaciones de punto fijo. Este proceso se repite para cada iteración del algoritmo PSO, involucrando las variables X_{it} y P_{it} .

Se identifican dos tipos de PSO: la del problema general, PSO MAIN, y la del punto fijo interior, PSO SUB. El PSO MAIN, optimiza el precio y la cantidad producida para cada artículo $i \in I$ en el período $t \in T$, y el PSO SUB, integrado dentro del MAIN, que determina el óptimo de la cantidad almacenada para cada producto $i \in I$ en el período $t \in T$.

A continuación, se identifican los pasos requeridos para una correcta implementación del algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) para ambas optimizaciones:

a. Inicialización de Parámetros

Inicialmente, se debe otorgar un valor a los parámetros tanto del algoritmo de resolución, como a los requeridos para la definición de la demanda mediante el modelo de elección

multinomial condicionada (CMNL) en el algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) SUB. Esto incluye:

- **Parámetros del Algoritmo PSO:** Asignar valores a los parámetros del PSO, tales como el número de partículas, el número de iteraciones, y los coeficientes de aceleración.
- **Parámetros del CMNL:** Definir los parámetros necesarios para modelar la demanda mediante el CMNL, que incluyen las variables de utilidad, las probabilidades de elección, y las restricciones asociadas a cada ítem.

Este paso es crucial para garantizar que el algoritmo de resolución y el modelo de demanda sean configurados adecuadamente antes de proceder con la optimización.

i. En lo que respecta al método PSO, definimos el número de iteraciones ($n_{iter,SUB}$ y $n_{iter,MAIN}$), cantidad de partículas ($n_{swarm,SUB}$ y $n_{swarm,MAIN}$) para cada optimización. Asimismo, las cotas anteriormente definidas y el número de períodos ($n_T = 5$) y productos ($n_{PROD} = 2$).

Parámetros PSO	PSO MAIN	PSO SUB
Número de iteraciones	$n_{iter,MAIN} = 55$	$n_{iter,SUB} = 8$
Cantidad de partículas	$n_{swarm,MAIN} = 200$	$n_{swarm,SUB} = 100$

Cuadro A.1: Número de iteraciones y partículas—PSO MAIN y PSO SUB

La selección de iteraciones y partículas en PSO impacta significativamente en su rendimiento. Se establecieron 55 iteraciones para PSO MAIN y 8 para PSO SUB, logrando convergencia sin excesiva carga computacional, respaldado por resultados consistentes. Para las partículas, se eligieron 200 para PSO MAIN y 100 para PSO SUB, equilibrando la exploración del espacio de soluciones con la eficiencia computacional, lo que resultó en una adecuada diversidad exploratoria y estabilidad en los resultados.

ii. Los factores de aprendizaje cognitivo y social (c_1 y c_2) se configuran de manera uniforme para ambos algoritmos PSO (c_{1SUB} , c_{2SUB} y c_{1MAIN} , c_{2MAIN}). Estos factores se asignan aleatoriamente a partir de conjuntos predefinidos en cada iteración y partícula evaluada, con el fin de potenciar la capacidad exploratoria de ambos algoritmos.

Factores de Aprendizaje PSO	PSO MAIN	PSO SUB
Factor de aprendizaje cognitivo (c_1)	$c_{1,MAIN} = [0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1]$	$c_{1,SUB} = [0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1]$
Factor de aprendizaje social (c_2)	$c_{2,MAIN} = [0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1]$	$c_{2,SUB} = [0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1]$

Cuadro A.2: Factores de Aprendizaje—PSO MAIN y PSO SUB

iii. A continuación se presentan las ecuaciones de inicialización de las variables. Primero, se inicializa el PSO MAIN en la posición y velocidad de las variables. Es decir, X_{it} y P_{it} para cada partícula $w \in n_{swarm,MAIN}$ en la iteración $m = 0$.

Inicialización de Variables PSO MAIN	Cantidad Producida (X_{it})	Precio (P_{it})
Posición de la partícula (w)	$PX(m=0)_{wit} = m_{capi} \cdot \text{random}()$	$PP(m=0)_{wit} = P_{max} \cdot \text{random}()$
Velocidad de la partícula (w)	$VX(m=0)_{wit} = 0,5 \cdot m_{capi} \cdot \text{random}()$	$VP(m=0)_{wit} = 0,5 \cdot P_{max} \cdot \text{random}()$

Cuadro A.3: Inicialización de Variables—PSO MAIN

iv. Posteriormente, se sigue el mismo procedimiento para el PSO SUB, donde se inicializa S_{it} para cada partícula $w \in n_{swarm,SUB}$ en la iteración $s = 0$. En este caso, la posición preliminar de almacenamiento es equivalente a 0.

Inicialización de la Variable de Almacenamiento (S_{it})—PSO SUB	
Posición de la partícula (w)	$PS(s=0)_{wit} = 0$
Velocidad de la partícula (w)	$VS(s=0)_{wit} = 0,5 \cdot k_{cap} \cdot \text{random}()$

Cuadro A.4: Inicialización de Variables de Almacenamiento (S_{it})—PSO SUB

v. Cabe destacar que se crean las variables que conservan la mejor posición de la partícula en cuestión ($P_{bestX_{wit}}$, $P_{bestP_{wit}}$ y $P_{bestS_{wit}}$), donde estas toman el valor de la respectiva partícula w en la primera iteración ($m = 0$; $s = 0$) a modo de inicialización. Luego, la mejor posición del enjambre en su totalidad ($G_{bestX_{it}}$, $G_{bestP_{it}}$ y $G_{bestS_{it}}$) inicia con el valor de la partícula $w = 0$ correspondiente a la primera iteración ($m = 0$; $s = 0$).

vi. Finalmente, en el cuadro A.5 se muestra el peso de inercia máximo (w_{max}) y mínimo (w_{min}) requeridos para el cálculo de la inercia ($w(t)$) de cada variable en cada iteración según la ecuación 2.13. Cabe resaltar que estos valores son los mismos para el precio, la cantidad almacenada y producida.

vii. Los valores de los parámetros de CMNL, necesarios para el cálculo de la demanda en PSO SUB, son los siguientes:

b. Una vez inicializadas las variables, se procede a realizar el cálculo de la demanda dentro del PSO SUB. Para esto, se determina V_{it} , $\phi_{Prod_{it}}$ y $\phi_{Stock_{it}}$ con las ecuaciones

Peso de Inercia—PSO	Valor
Peso mínimo de inercia ($w_{\min}$)	0,6
Peso máximo de inercia ($w_{\max}$)	0,9

Cuadro A.5: Peso de Inercia—PSO

Parámetros CMNL asociados a las restricciones de almacenamiento y producción	Restricción de Almacenamiento	Limitación de la Producción
Proporción de personas que incumplen la restricción	$\eta_{Stock} = 0,5$	$\omega_{Stocki} = [10, 10]$
Peso asociado a la restricción	$\eta_{Prod} = 0,5$	$\omega_{Prodi} = [6, 6]$

Cuadro A.6: Parámetros CMNL asociados a limitaciones de almacenamiento y producción

3.1, 3.3 y 3.4, respectivamente. Posteriormente, se evalúan los valores obtenidos en la ecuación 3.2 para la estimación de D_{it} .

c. Luego, se calcula el valor de $S_{PRUEBAit}$ utilizando la ecuación 3.13 y los resultados obtenidos en el paso previo. A continuación, se procede a evaluar el error del punto medio entre este valor y S_{it} , el cual ha sido estimado mediante las ecuaciones del PSO SUB.

d. Los pasos descritos en los ítemes b y c se ejecutan de manera reiterativa para cada partícula e iteración dentro del algoritmo SUB. Es pertinente señalar que, en cada instancia, se procede a la actualización de la posición y velocidad de las partículas conforme a las ecuaciones de actualización del PSO detalladas en 2.11, 2.12 y 2.13. Adicionalmente, se actualizan los valores de $P_{\text{best}}^{S_{it}}$ y $G_{\text{best}}^{S_{it}}$, siempre que el error asociado a la variable evaluada sea inferior al previamente registrado.

e. Finalmente, se determina la partícula $G_{\text{best}}^{S_{it}}$ para cada producto $i \in I$ y período $t \in T$ que minimiza el error cuadrático de almacenamiento en el conjunto completo del enjambre. Con esto se concluye el proceso del PSO SUB, y se procede a ejecutar el PSO MAIN para la determinación de X_{it} y P_{it} .

f. Una vez que se ha alcanzado un valor estable para S_{it} y, en consecuencia, para D_{it} , se calcula la función objetivo del PSO MAIN conforme a la ecuación 3.8. En función de este cálculo, se actualizan los valores de $P_{\text{best}}^{X_{wit}}$, $P_{\text{best}}^{P_{wit}}$, $G_{\text{best}}^{X_{it}}$ y $G_{\text{best}}^{P_{it}}$, siempre que el nuevo valor sea superior al registrado por dichas variables.

g. A continuación, se actualizan las posiciones y velocidades de X_{it} y P_{it} utilizando las ecuaciones 2.11, 2.12 y 2.13. Posteriormente, se repiten los pasos descritos previamente

(a partir del punto b) para cada nueva actualización.

h. Una vez completada la evaluación de todas las partículas e iteraciones en el PSO MAIN, el proceso se considera finalizado. Se obtienen así los valores óptimos para S_{it} , X_{it} y P_{it} que maximizan la utilidad de la firma.

A.2. Análisis de la Resiliencia del Modelo

El análisis de la resiliencia del modelo se centra en evaluar su capacidad para mantener un desempeño efectivo y robusto bajo condiciones cambiantes o adversas. Los principales aspectos a considerar son:

Robustez frente a Perturbaciones

- **Variación de Parámetros:** Evaluar cómo el modelo responde a cambios en los parámetros de entrada, incluyendo la sensibilidad a errores de datos o variaciones en las condiciones iniciales.
- **Condiciones Adversas:** Analizar el comportamiento del modelo bajo condiciones extremas o no previstas, tales como eventos inesperados o fluctuaciones significativas en los datos.

Convergencia y Estabilidad

- **Comportamiento bajo Iteraciones:** Examinar la estabilidad del modelo durante el proceso de iteración o ejecución repetida, observando si converge a soluciones consistentes y estables a lo largo del tiempo.
- **Diversidad de Escenarios:** Probar el modelo en una variedad de escenarios y situaciones para asegurar que pueda manejar diferentes tipos de incertidumbre y variabilidad.

Desempeño del Algoritmo

- **Eficiencia Computacional:** Evaluar la rapidez con la que el modelo procesa datos y produce resultados, incluyendo el tiempo de ejecución y el uso de recursos computacionales.

- **Escalabilidad:** Analizar cómo el modelo se comporta cuando se escala a mayores volúmenes de datos o instancias más complejas del problema.

Evaluación Comparativa

- **Comparación con Modelos Alternativos:** Comparar el modelo propuesto con otros modelos existentes para determinar si ofrece ventajas en términos de resiliencia, rendimiento y robustez.
- **Pruebas de Estrés:** Realizar pruebas de estrés para identificar las limitaciones del modelo y las condiciones bajo las cuales puede fallar o degradarse significativamente.

Impacto de las Condiciones de Contorno

- **Escenarios Extremos:** Evaluar cómo el modelo se comporta en condiciones límite o en escenarios extremos que podrían poner a prueba su capacidad de respuesta.
- **Adaptación a Cambios:** Analizar cómo el modelo se adapta a cambios en el entorno o en las condiciones del mercado, y si puede ajustar sus estrategias o soluciones de manera efectiva.

Para evaluar la eficiencia y performance del modelo bajo diversas condiciones y escenarios, se realizaron distintas pruebas analizando la consistencia de la función objetivo de utilidad y los tiempos de ejecución del algoritmo (ver cuadro A.7).

Casos de estudio	Testeo	Tiempo de ejecución del algoritmo
Escenario base	Prueba 1	3:49:26
	Prueba 2	3:09:12
	Prueba 3	2:58:29
Escenario 1: Limitación en producto más atractivo mediante costos y capacidades: Mercado de alta sensibilidad de precios	ML $\uparrow$ C_{Prod}	2:59:01
	ML $\downarrow$ m_{Cap}	3:43:15
Escenario 2: Limitación en producto más atractivo a través de parámetros CMNL:		
a) Mercado de segmento de clientes cuantioso. Aumento de tamaño de mercado		3:21:54
b) Variación de utilidad de no-compra	$E_0 = 2$	3:09:51
	$E_0 = 1$	3:24:26

Cuadro A.7: Tiempos de ejecución del algoritmo para diferentes escenarios y pruebas.

Dado que el algoritmo es heurístico, se esperan variaciones tanto en la función objetivo como en las variables, reflejando múltiples combinaciones posibles que maximizan las utilidades.

A.2.1. Escenario 0: Caso base o referencial

El escenario base muestra que el método de punto fijo, implementado con el algoritmo PSO, converge efectivamente al determinar el almacenamiento óptimo en función de la demanda, el atractivo del producto, la producción y el precio, lo que evidencia la robustez del modelo. La variabilidad en los tiempos de ejecución se debe a las iteraciones del PSO MAIN y a la concurrencia de tareas en el procesador. Sin embargo, la consistencia en las curvas de convergencia del PSO MAIN confirma la robustez y eficacia del modelo (ver figuras 4.1, 4.2 y 4.3).

A.2.2. Escenario 1: Limitación en producto más atractivo mediante costos y capacidades

Se muestran los resultados de limitar la producción de un producto atractivo mediante altos costos y capacidades bajas, evaluando el impacto en mercados con alta y baja sensibilidad a precios.

Mercado de alta sensibilidad de precios

Se analizan los resultados del algoritmo al limitar la capacidad de producción y aumentar los costos del producto más atractivo en comparación con el escenario base, denominados $ML \uparrow C_{\text{Prod}}$ y $ML \downarrow m_{\text{Cap}}$. El PSO SUB muestra alta convergencia en ambos escenarios, evidenciada tanto por los valores obtenidos como por el comportamiento estable de la convergencia a lo largo de las iteraciones.

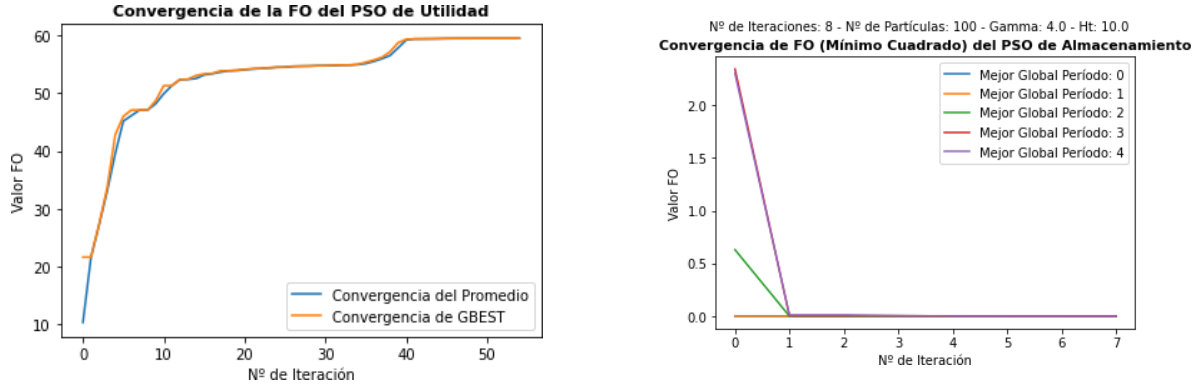


Figura A.1: Mejor convergencia - Escenario 1 ($ML \uparrow C_{Prod}$).

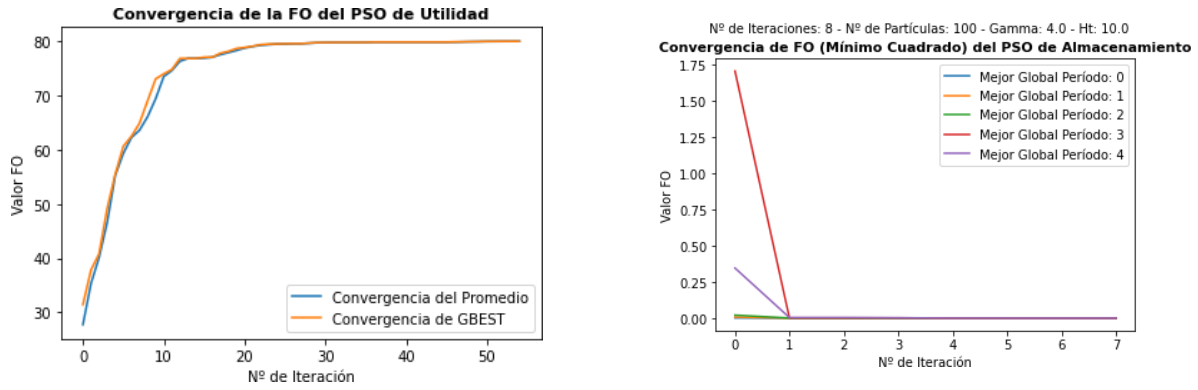


Figura A.2: Mejor convergencia - Escenario 1 ($ML \downarrow m_{Cap}$).

Los tiempos de ejecución varían significativamente entre las pruebas. Esta diferencia probablemente se debe a la frecuencia de ejecución del PSO SUB y a la velocidad de convergencia del PSO MAIN. Además, las tareas paralelas del computador pueden incrementar el tiempo total de ejecución del programa.

Mercado de baja sensibilidad de precios

Se analizan las condiciones de altos costos de producción y capacidad limitada en un contexto de baja sensibilidad al precio (β). Los tiempos de ejecución varían entre . Similar al mercado con alta sensibilidad a precios, el algoritmo presenta mayores tiempos de ejecución cuando se limita la capacidad productiva. Esto puede deberse a cálculos adicionales necesarios para la determinación de demanda y la convergencia del PSO SUB en este escenario.

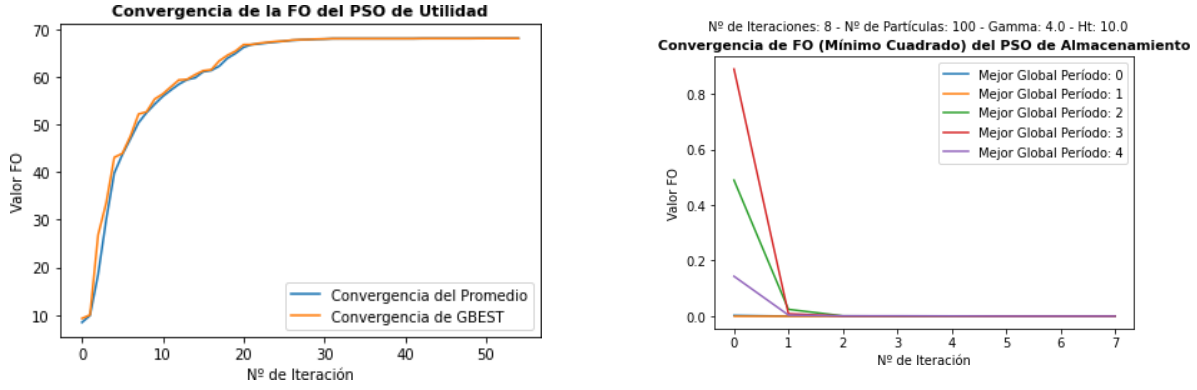


Figura A.3: Mejor convergencia - Escenario 1 ($MBI \uparrow C_{Prod}$).

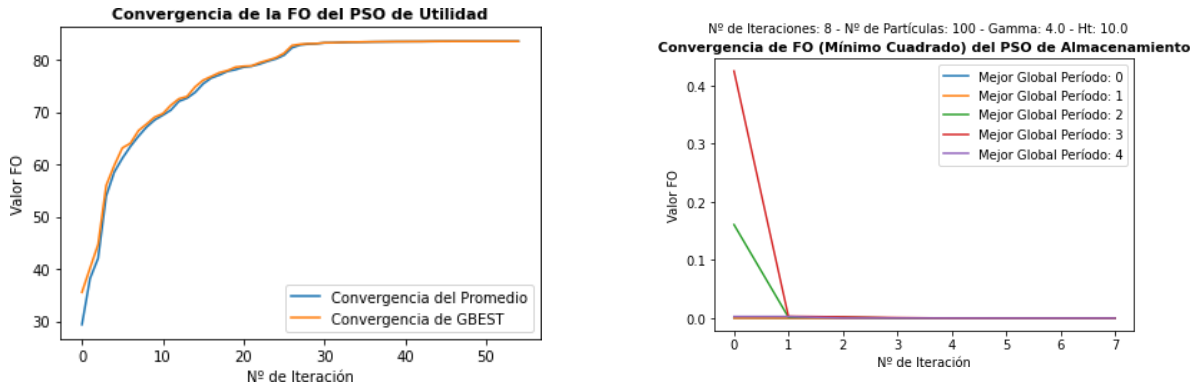


Figura A.4: Mejor convergencia - Escenario 1 ($MBI \downarrow m_{Cap}$).

A.2.3. Escenario 2: Limitación en producto más atractivo a través de parámetros CMNL

Este escenario analiza variaciones en los parámetros CMNL con un Producto 2 más atractivo, evaluando un incremento del segmento de mercado a 15 individuos y una reducción en la utilidad de no-compra, primero a 2 y luego a 1.

Mercado de gran segmento de clientes

Con $\beta = 15$, el ajuste en el algoritmo incrementa notablemente las ganancias, reflejando la incorporación de 5 individuos adicionales. El Producto 2, por su mayor atraktividad, lidera en utilidades. El PSO MAIN garantiza la maximización de la utilidad mediante su convergencia, mientras que el PSO SUB valida la precisión en la cantidad almacenada, evidenciada por los mínimos valores de la función de punto fijo.

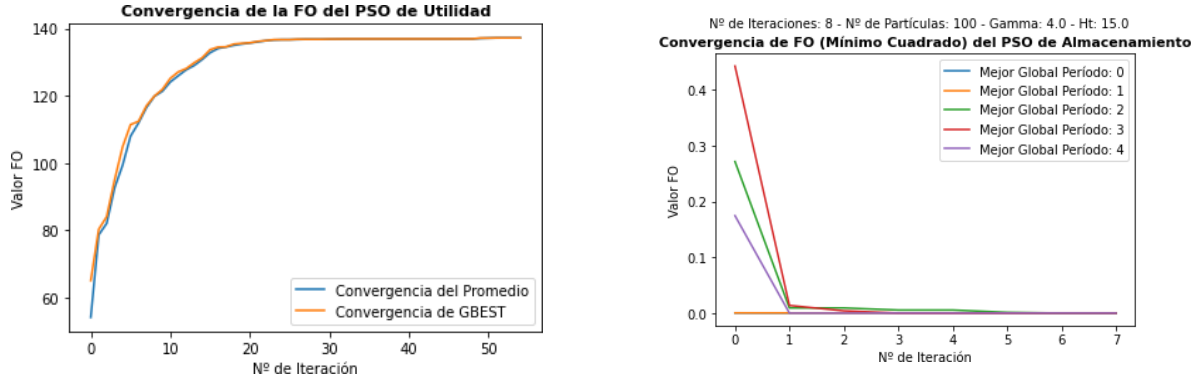


Figura A.5: Mejor convergencia - Escenario 2: Aumento del tamaño de mercado.

Baja utilidad de no-compra

Se evalúan dos escenarios de utilidad de no-compra ($E_{v0} = 2$ y $E_{v0} = 1$) en un mercado donde el producto 2 es altamente atractivo. Los resultados indican una eficiente convergencia del PSO SUB, con la función de punto fijo tendiendo a 0 para ambos productos. Los tiempos de ejecución son similares, con diferencias atribuibles a las tareas paralelas del procesador o al número de iteraciones necesarias para la convergencia del algoritmo.

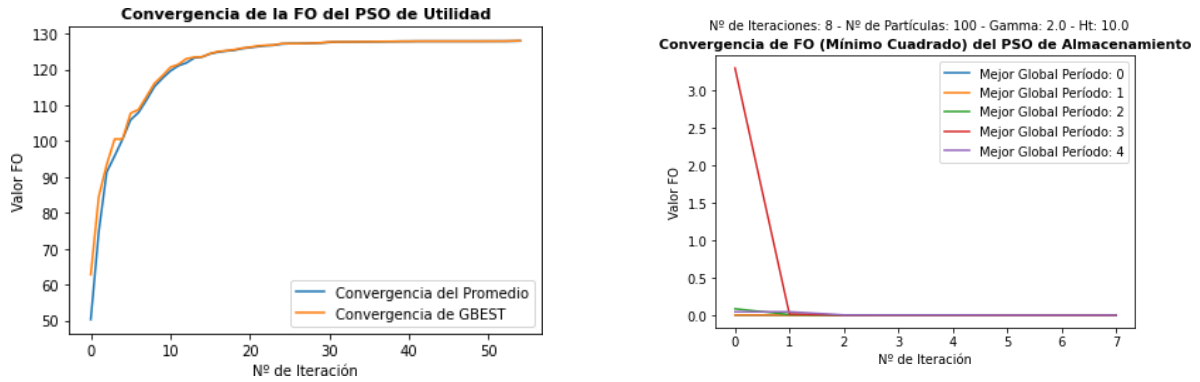


Figura A.6: Mejor convergencia - Escenario 2 ($E_{V0=2}$).

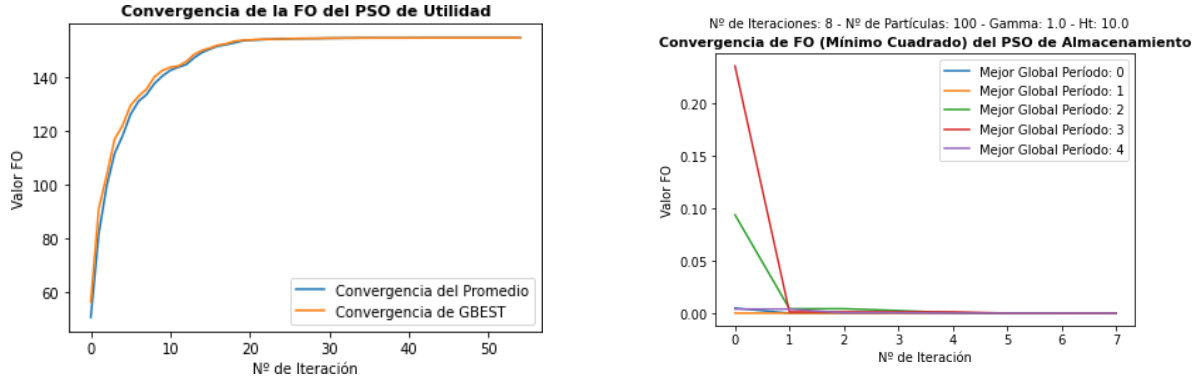


Figura A.7: Mejor convergencia - Escenario 2 ($E_{V0=1}$).

En resumen, el análisis de la resiliencia del modelo busca asegurar que el modelo no solo funcione bien bajo condiciones normales, sino que también mantenga su efectividad y adaptabilidad bajo condiciones adversas y cambios en el entorno.

Apéndice B

Conjunto de reglas para el FIS tipo Mamdani

B.1. Datos *relevantes* del “ D ” a través de Mamdani FIS

Esta sección describe las condiciones “*if – then*” consideradas en la máquina FIS de MISO Mamdani. Los detalles de las distintas combinaciones de reglas utilizadas para evaluar el número “ D ” con este esquema, se muestra en el cuadro B.1.

El esquema de inferencia difusa Mamdani FIS aplicado al modelo MISO muestra una estructura de reglas *if-then* que evalúan la clasificación de churners (variable D) en función de las variables de entrada V , F y L . La tabla presenta 27 reglas exhaustivas que cubren diversas combinaciones de estos parámetros, lo que permite capturar variaciones significativas en el comportamiento de los clientes.

La asignación de *Yes* o *No* para determinar el churn muestra una regularidad que sugiere una segmentación eficiente en el espacio de decisión. No obstante, sería pertinente un análisis de sensibilidad para evaluar la influencia relativa de cada entrada y la consistencia del modelo en escenarios reales. La validación empírica mediante datos históricos mejoraría la precisión del modelo.

Regla	V	F	L	D (Churner)
1	bajo	bajo	bajo	Yes
2	bajo	bajo	medio	Yes
3	bajo	bajo	alto	Yes
4	bajo	medio	bajo	Yes
5	bajo	medio	medio	Yes
6	bajo	medio	alto	Yes
7	bajo	alto	bajo	Yes
8	bajo	alto	medio	Yes
9	bajo	alto	alto	Yes
10	medio	bajo	bajo	Yes
11	medio	bajo	medio	Yes
12	medio	bajo	alto	Yes
13	medio	medio	bajo	Yes
14	medio	medio	medio	No
15	medio	medio	alto	No
16	medio	alto	bajo	Yes
17	medio	alto	medio	No
18	medio	alto	alto	No
19	alto	bajo	bajo	Yes
20	alto	bajo	medio	Yes
21	alto	bajo	alto	Yes
22	alto	medio	bajo	Yes
23	alto	medio	medio	No
24	alto	medio	alto	No
25	alto	alto	bajo	Yes
26	alto	alto	medio	No
27	alto	alto	alto	No

Cuadro B.1: Reglas con los valores de V, F, L y D (Churner, No-Churner).

B.2. Resultados extendidos para el caso base

Esta sección presenta los resultados detallados obtenidos en el caso base, destacando la incapacidad de vincular el incentivo δ con el valor de la propensión a aceptar la campaña γ . Esto sugiere una falta de sensibilidad del modelo Mamdani a variaciones en los parámetros que definen la campaña, lo cual podría deberse a la naturaleza de las reglas de inferencia utilizadas. Este comportamiento indica una posible necesidad de recalibración del sistema de reglas para mejorar la precisión de las predicciones en función de los incentivos. Además de casos con un comportamiento natural del modelo para observar cómo mejora la máquina de Mamdani con mayores restricciones tal como se muestra en el cuadro 4.39, pero se pudo comprobar que este escenario no permite una optimización adecuada y no se observa ninguna mejora.

A continuación se presentan diversos casos para reglas de Mamdani churner con el fin de verificar la calibración de la máquina.

B.2.1. Matriz de Confusión y sus métricas

La matriz de confusión es una herramienta indispensable para valorar cómo nuestro modelo está operando en términos de predicción.

Dentro de esta matriz encontramos cuatro componentes clave que representan distintos escenarios de predicción, tal como se muestra en la figura B.1:

- **Verdadero Negativo (VN):** Aquí, el modelo acierta al identificar a los clientes de un segmento específico con una baja tendencia a ser churners.
- **Falso Positivo (FP):** Este caso nos muestra a los clientes que, según nuestro modelo, son churners dentro de su segmento, pero que en la realidad no tienen intenciones de dejar la compañía.
- **Falso Negativo (FN):** Estos son los clientes que el modelo clasifica como leales dentro de un segmento, pero que, contrariamente, sí están considerando dejar la empresa.
- **Verdadero Positivo (VP):** En este escenario, el modelo acierta al señalar a los clientes de un determinado segmento que efectivamente tienen una alta probabilidad de convertirse en churners.

PREDICCIÓN		
SALIDA	Positivo	Negativo
Positivo	Predicción correcta: Verdadero Positivo (VP)	Predicción incorrecta: Falso Negativo (FN) Error tipo II
Negativo	Predicción incorrecta: Falso Positivo (FP) Error tipo I	Predicción Correcta: Verdadero Negativo (VN)

Figura B.1: Matriz de Confusión.

Para poder medir el rendimiento del modelo se utilizaron las siguientes métricas:

- **Accuracy (Exactitud):** Representa la proporción de resultados que son verdaderos tanto los verdaderos positivos como los negativos comparándolos con todos los clientes. Se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$\text{Accuracy} = \frac{\text{VP} + \text{VN}}{\text{VP} + \text{FP} + \text{FN} + \text{VN}}$$

- **Precisión:** Representa qué proporción de los valores positivos son verdaderos positivos. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Precisión} = \frac{\text{VP}}{\text{VP} + \text{FP}}$$

- **Recall or Sensitivity (Sensibilidad):** Es la tasa de los verdaderos positivos sobre los resultados que estuvieron bien identificados por el modelo. Se calcula a través de la siguiente ecuación:

$$\text{Recall} = \frac{\text{VP}}{\text{VP} + \text{FN}}$$

- **Specificity (Especificidad):** Conocida también como la tasa de verdaderos negativos (True Negative Rate, TNR), se refiere a los casos negativos (no perseguidos) que el algoritmo ha clasificado correctamente. Expresa cuán bien puede el modelo detectar esa clase. Se calcula a través de la siguiente ecuación:

$$\text{Specificity} = \frac{\text{VN}}{\text{VN} + \text{FP}}$$

- **Tasa de falsos negativos:** Representa la proporción de los falsos negativos entre los verdaderos positivos y los falsos negativos. Se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Tasa de falsos negativos} = \frac{\text{FN}}{\text{FN} + \text{VP}}$$

- **Valor predictivo positivo:** Representa la proporción de verdaderos positivos entre el total de predicciones positivas. Se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Valor predictivo positivo} = \frac{\text{VP}}{\text{FP} + \text{VP}}$$

- **Valor predictivo negativo:** Representa la proporción de verdaderos negativos entre el total de predicciones negativas. Se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Valor predictivo negativo} = \frac{\text{VN}}{\text{VN} + \text{FN}}$$

B.2.2. Sensibilización Reglas Mamdani

Todas las modificaciones se hicieron sobre el caso base tal como se muestra en el cuadro B.2, en el que desde el caso de estudio V4_2 hasta el caso V4_9, se hizo la relación gamma-delta. Por el contrario, los otros casos analizados anteriormente no tiene esa relación (γ/δ). Este enfoque permite explorar el espacio de decisión para comprender mejor cómo las restricciones aplicadas afectan el desempeño del modelo. Sin embargo, los casos anteriores no contemplaban esta relación, lo que limita las comparaciones directas.

Para el análisis de cada uno de los casos, se debe tener en consideración:

- a) Se parte de la Base de que si $V=F=L=\text{Nivel Bajo} \rightarrow \text{Churner}$ y si $V=F=L=\text{Nivel}$

Alto $\rightarrow$ No Churner.

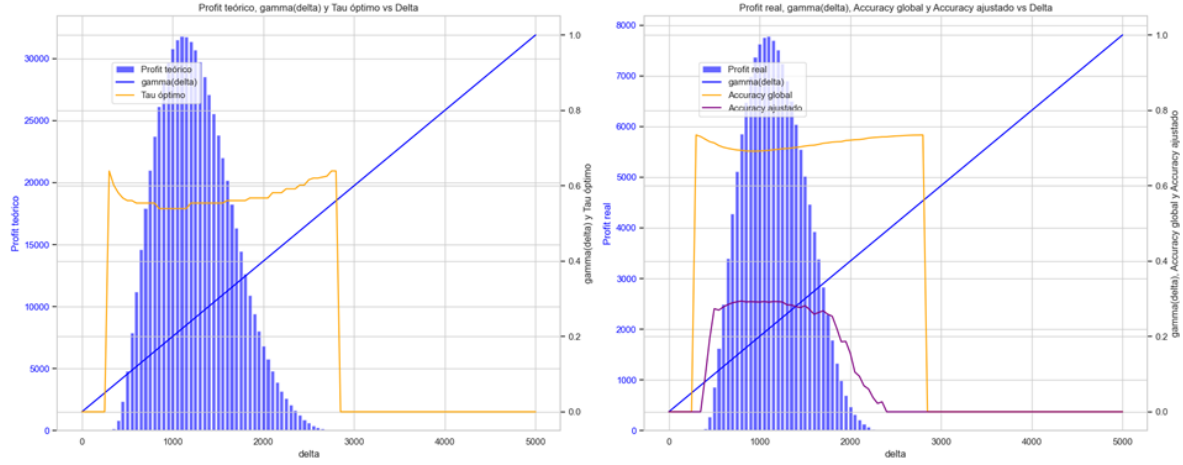
- b) Agregar accuracy 0.5 o accuracy natural, sin profit, solo diciendo por $D > 0.5$ Churner y $D < 0.5$ No-Churner (Recta constante).

Casos	V	Or/And F		Or/And L		Accuracy Natural
V4_2 (Churner) (Base $\rightarrow$ Misma Máquina)	Bajo	Or	Baja	Or	Baja	53,3 %
V4_3 (Churner)	Bajo	And	Baja	Or	Baja	64,0 %
V4_4 (Churner)			Baja			68,5 %
V4_5 (Churner) (Mejora más impactante)			Baja			64,5 %
V4_6 (Churner)	Bajo					53,4 %
V4_7 (Churner)	Bajo	Or	Baja	And	Baja	53,5 %
V4_8 (Churner)	Bajo	And	Baja			64,6 %
V4_9 (No churner)	Medio / Alto	Or	Medio / Alto			64,6 %

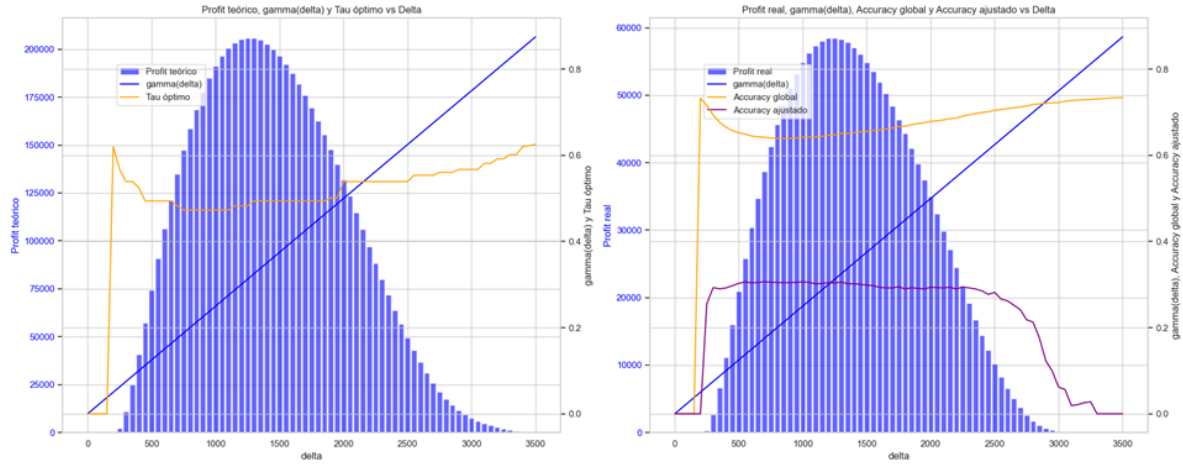
Cuadro B.2: Casos Churner y No-Churner con énfasis en mejora

En el contexto prescriptivo, se implementó un enfoque en el que la variable γ se modela como una función dependiente de δ , y este último se escala mediante un factor K .

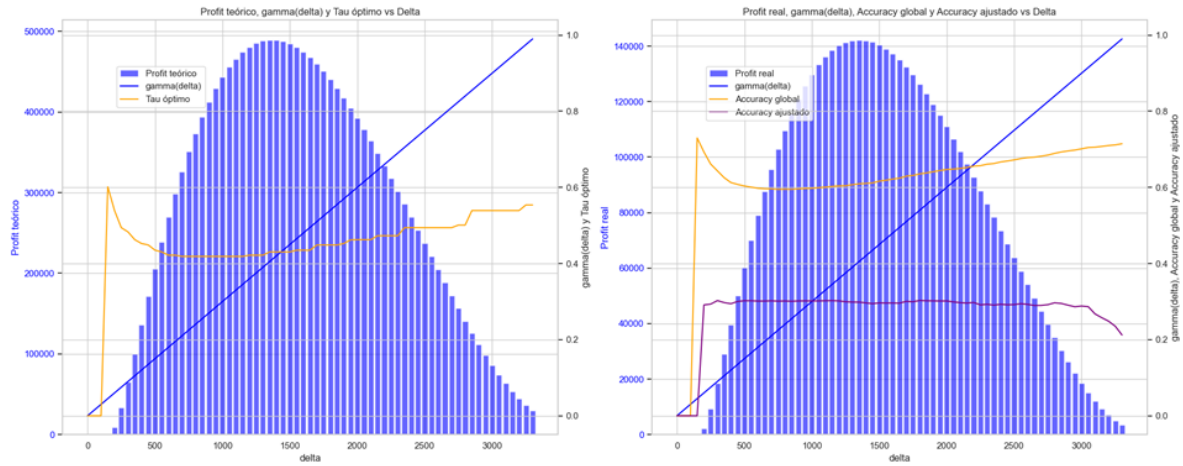
El procedimiento consistió en seleccionar un conjunto de valores de δ y, para cada uno de ellos, ajustar el valor de K . Por ejemplo, para $K = 0,0002$, se evaluaron todas las instancias de δ , determinando los correspondientes valores de γ . El valor de K fue obtenido a través de una aproximación, con el objetivo de que γ permaneciera en el intervalo $[0, 1]$. Cabe destacar que K no se calcula directamente, ya que forma parte de la propuesta metodológica, cuyo propósito es mantener los valores de γ dentro de dicho rango. Dado que δ fluctúa en un dominio específico, era necesario que K tomara valores muy pequeños para garantizar que el producto $\delta \cdot K$ generara resultados en el intervalo $[0, 1]$. Este ajuste iterativo de K permitió obtener las gráficas observadas, donde se aprecia un desplazamiento hacia la derecha. Inicialmente, las curvas exhiben una distribución similar a una normal, pero a medida que se incrementa K , la curva se expande asimétricamente, desapareciendo gradualmente en el extremo derecho.



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$

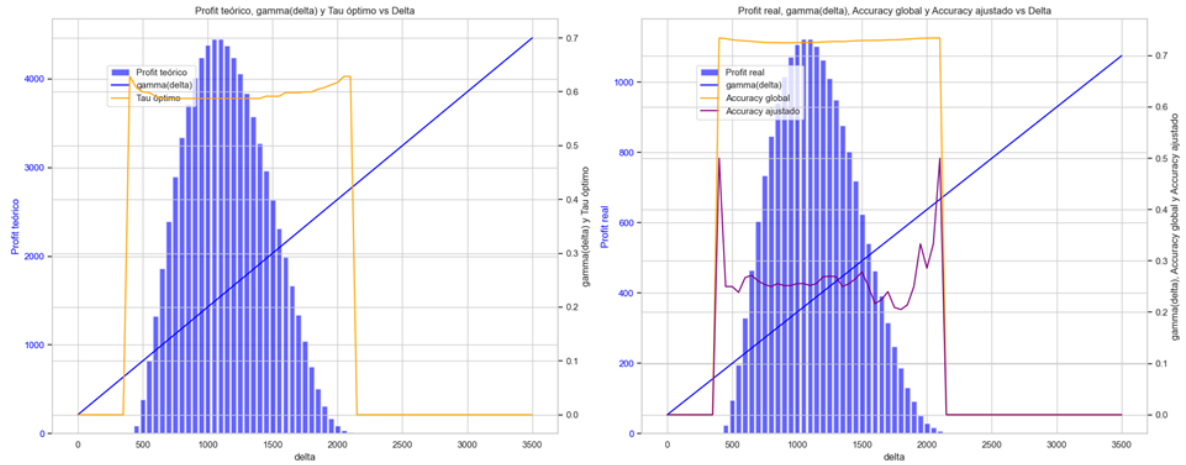


(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$

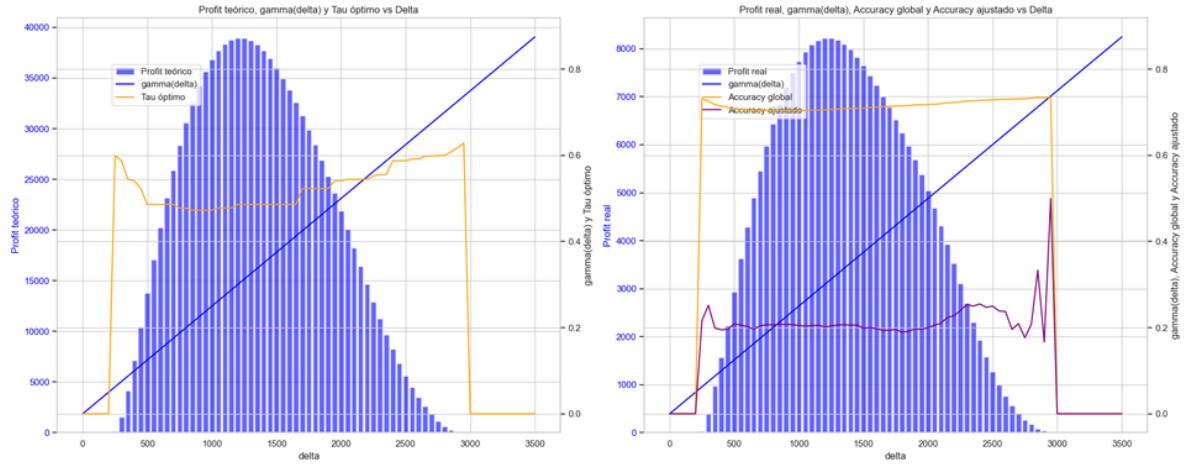


(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

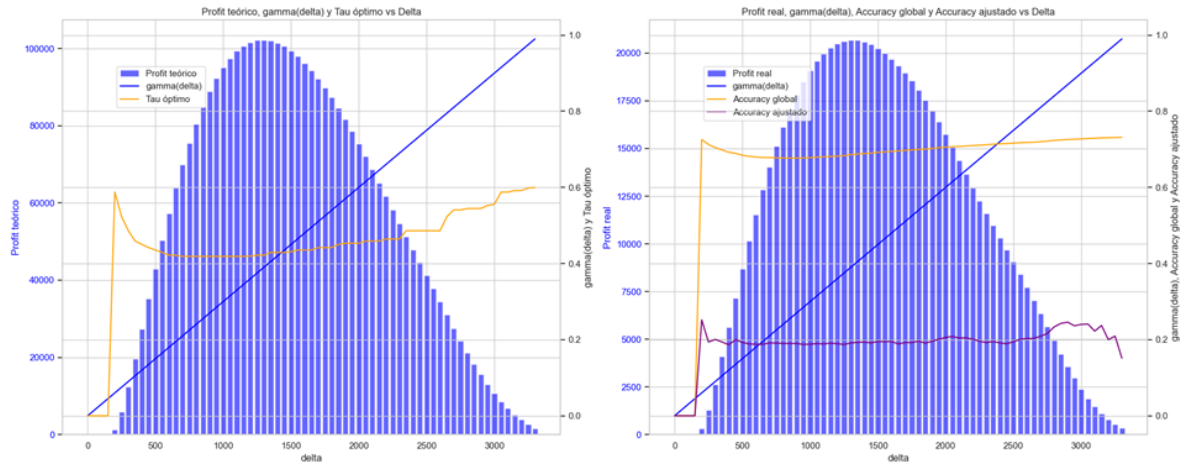
Figura B.2: Reglas FIS V4_2 para tres valores de K



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$

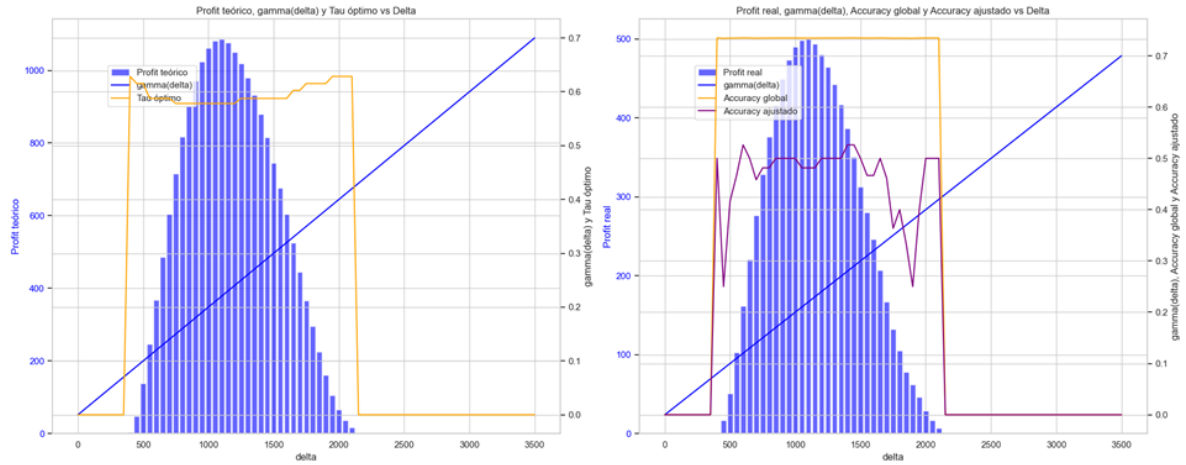


(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$

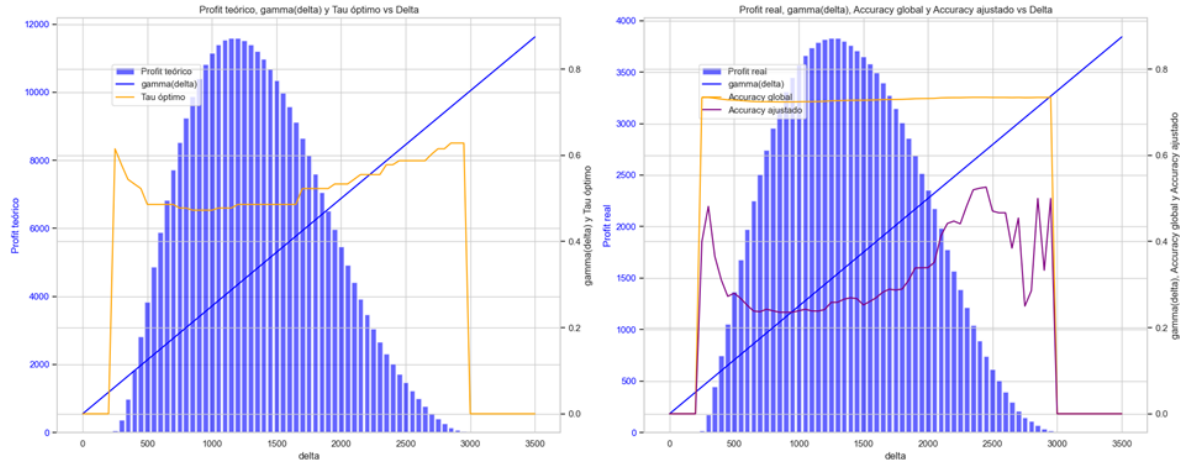


(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

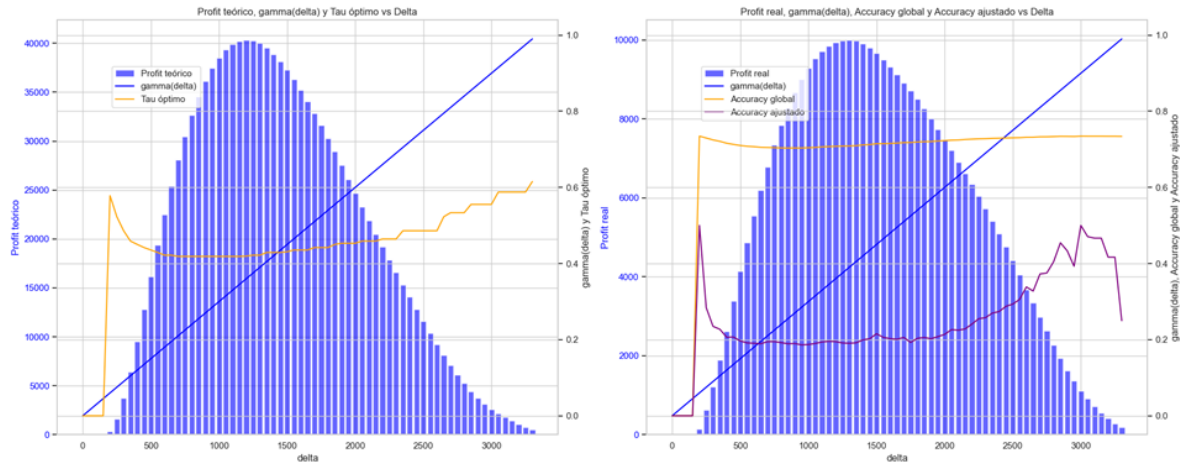
Figura B.3: Reglas FIS V4_3 para tres valores de K



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$

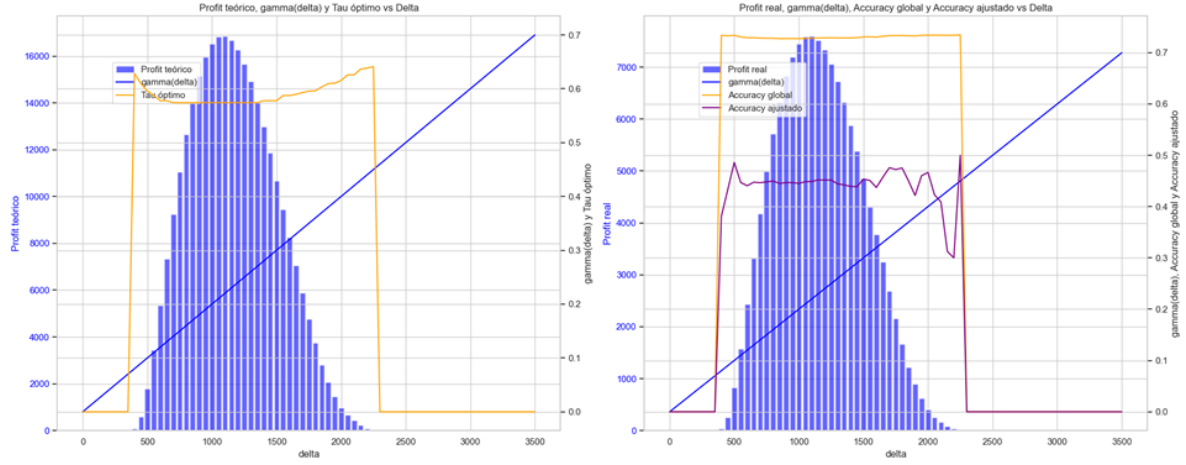


(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$

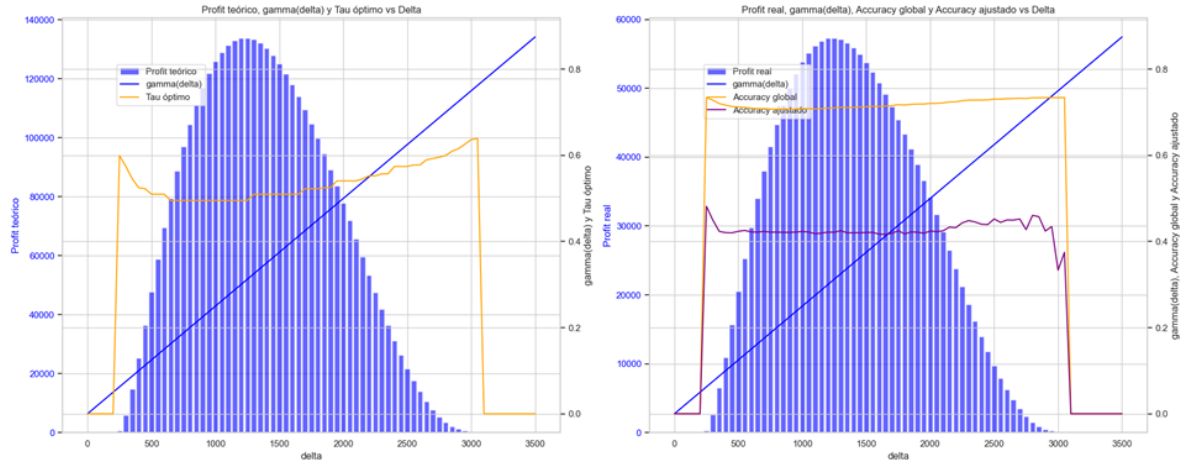


(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

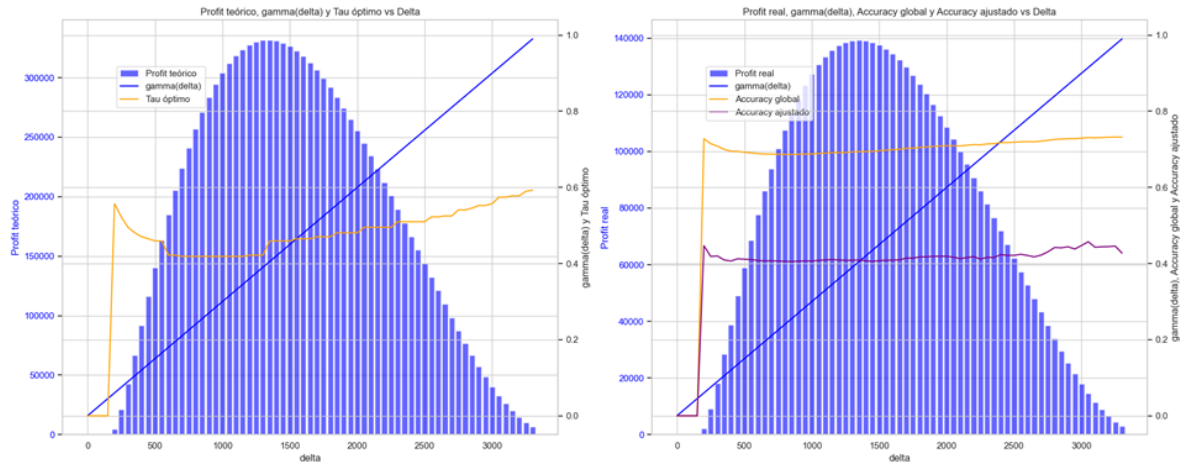
Figura B.4: Reglas FIS V4_4 para tres valores de K



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$

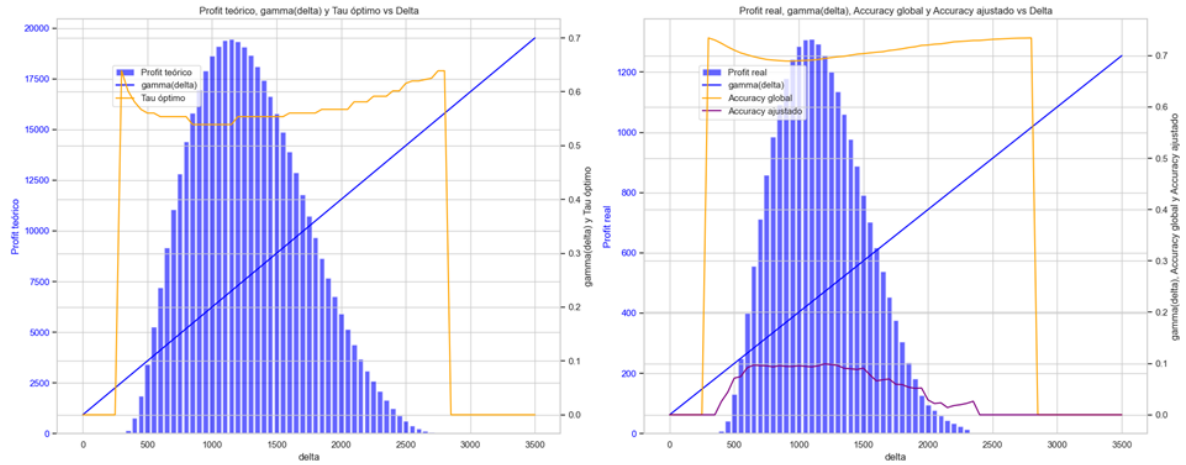


(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$

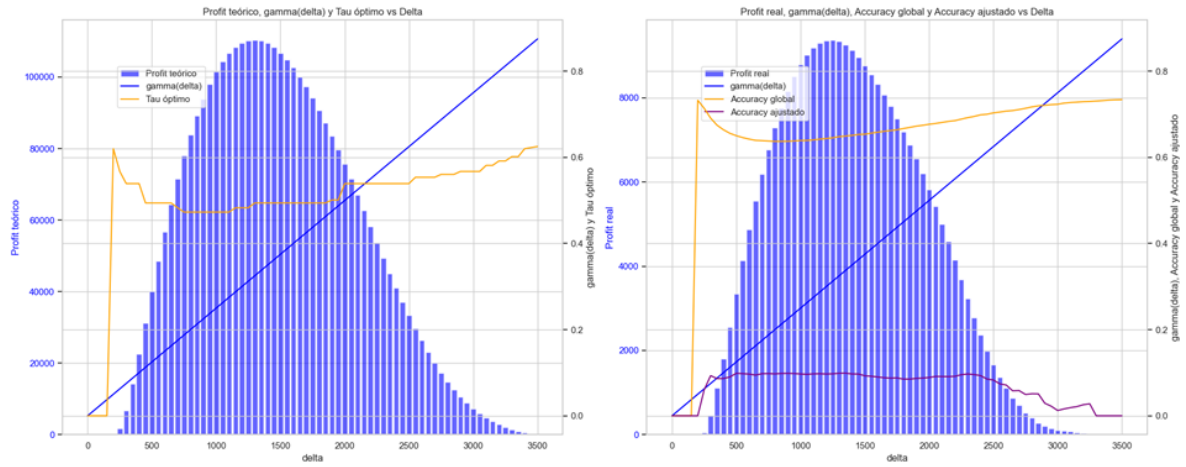


(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

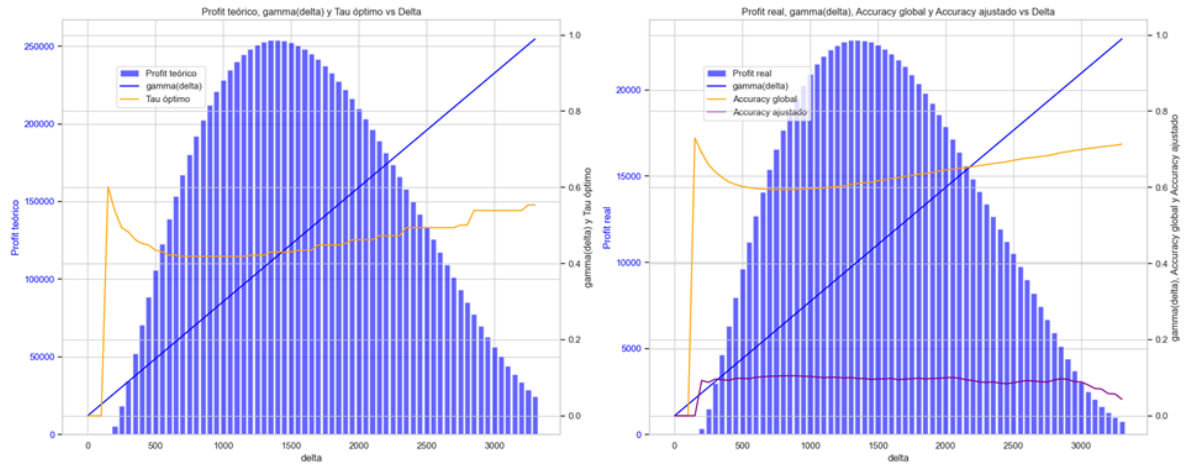
Figura B.5: Reglas FIS V4_5 para tres valores de K



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$

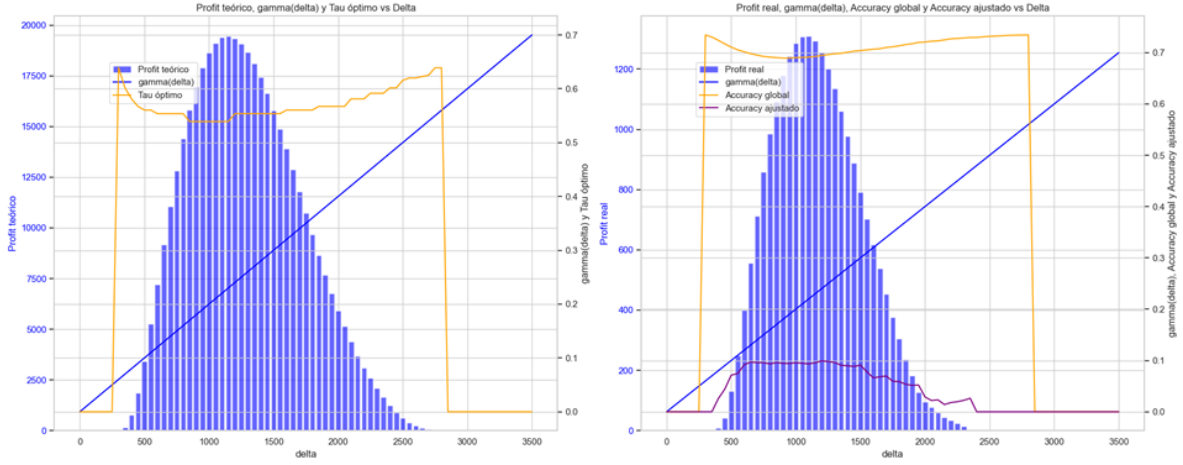


(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$

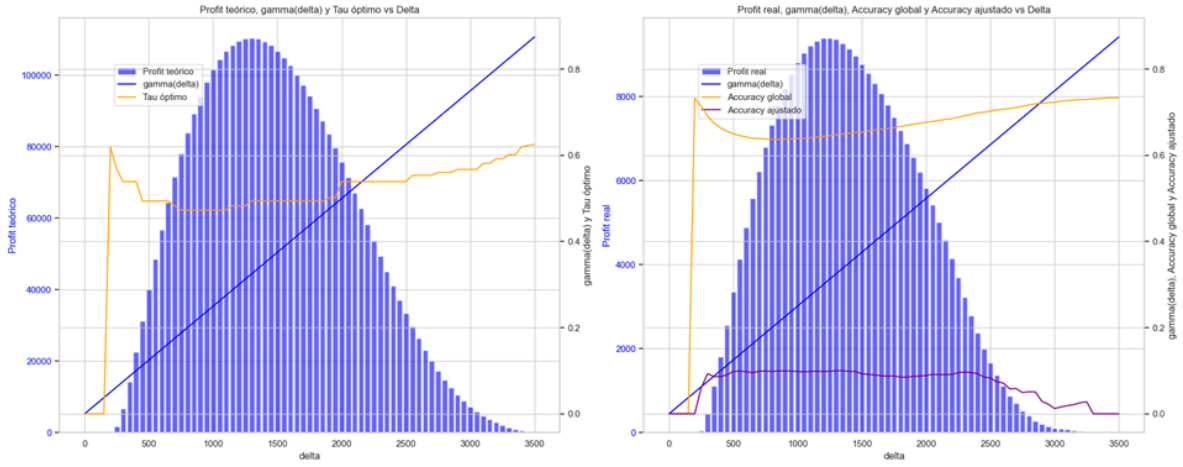


(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

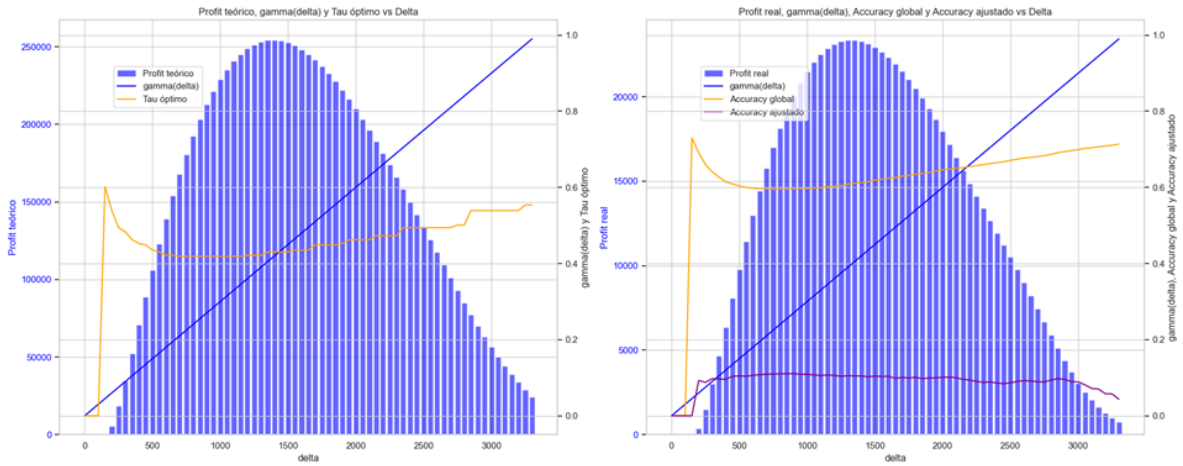
Figura B.6: Reglas FIS V4_6 para tres valores de K



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$

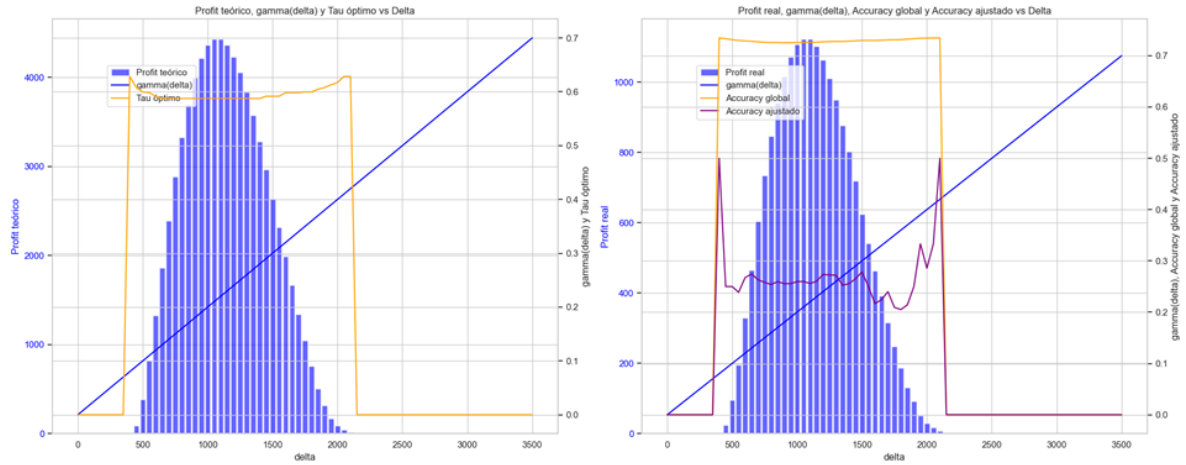


(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$

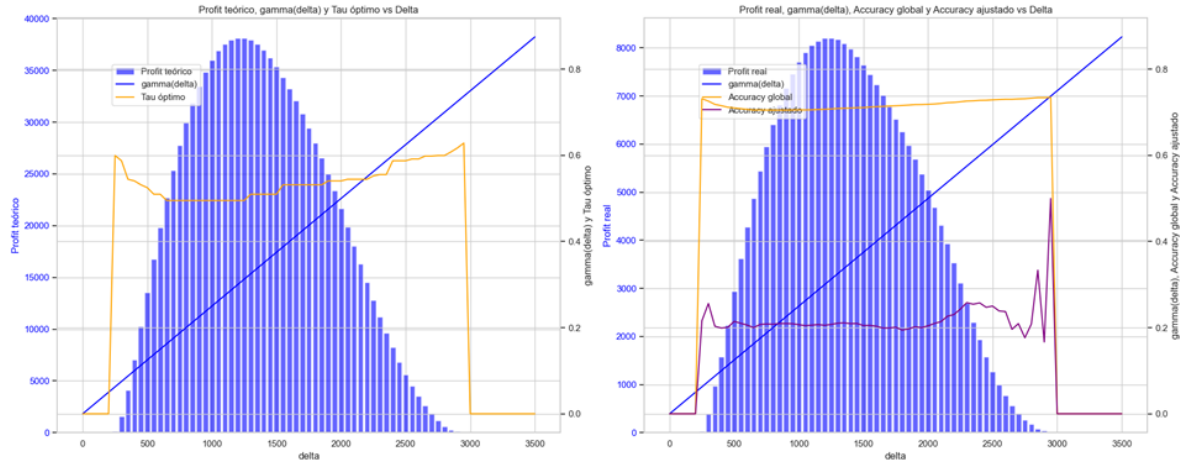


(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

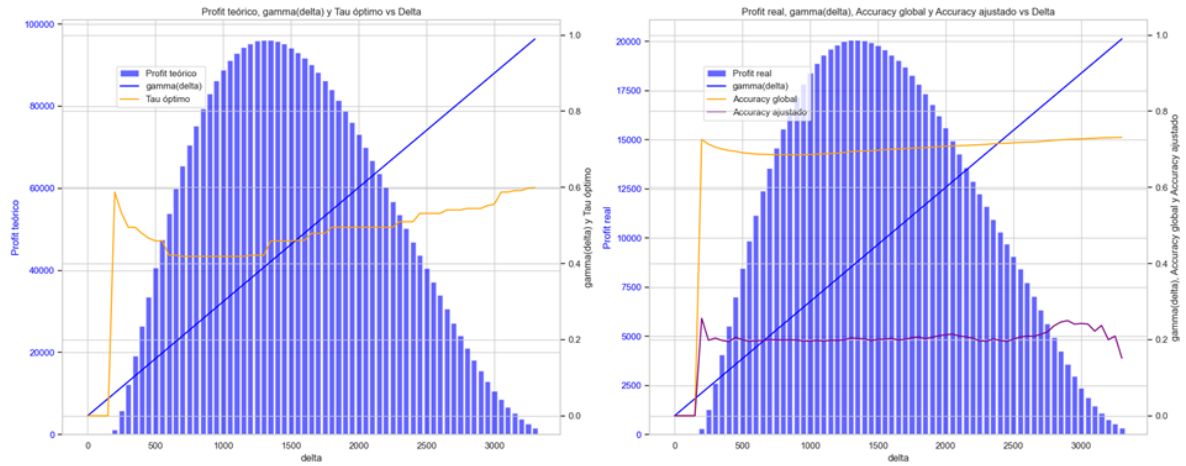
Figura B.7: Reglas FIS V4_7 para tres valores de K



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$

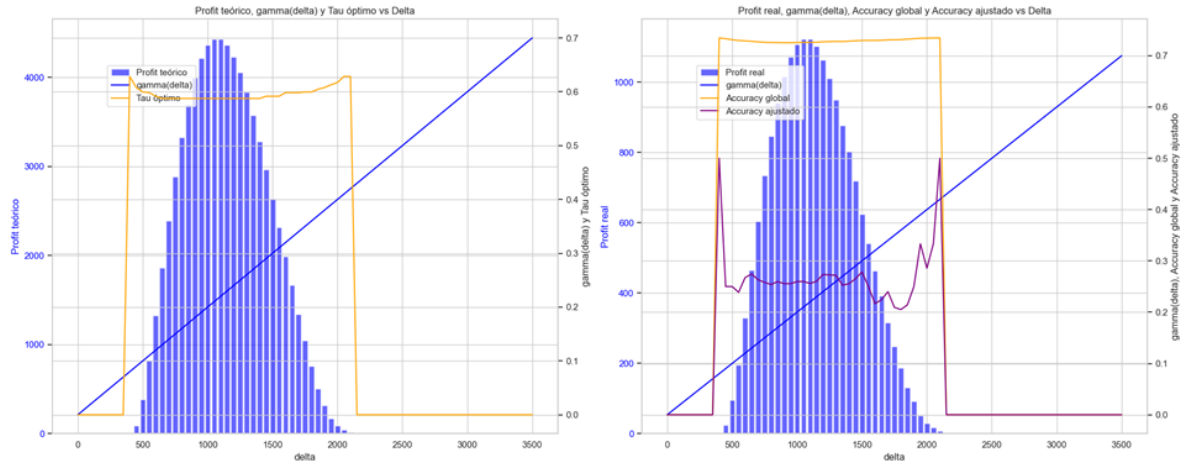


(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$

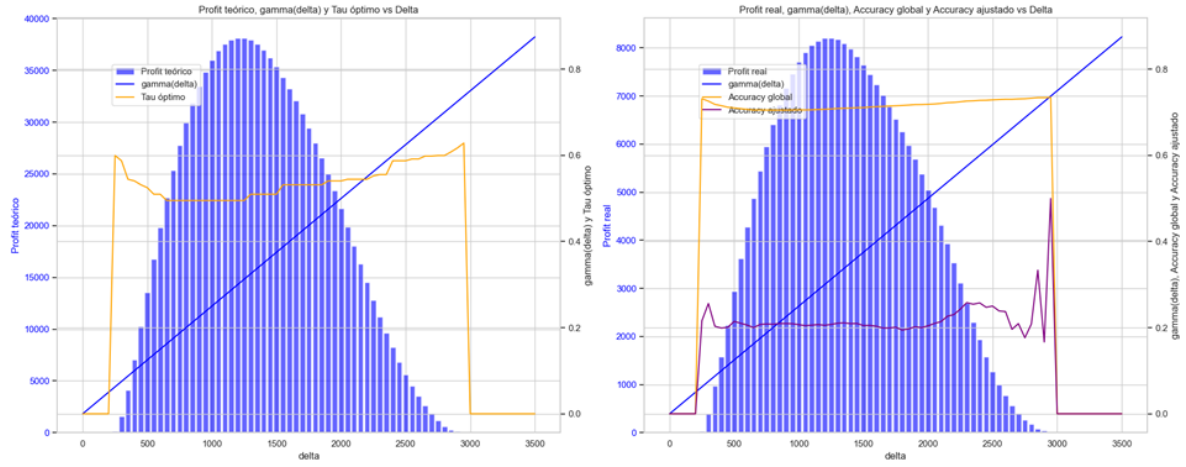


(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

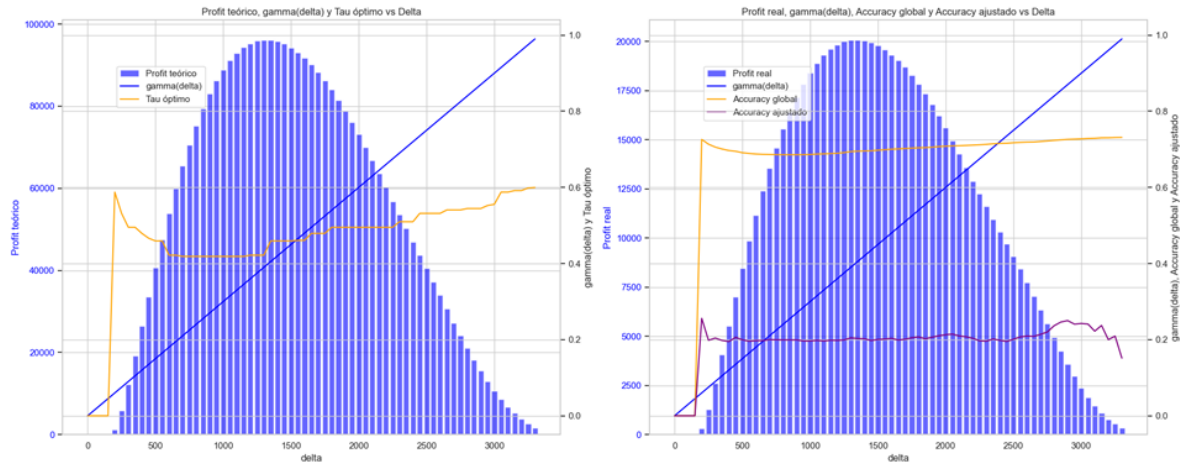
Figura B.8: Reglas FIS V4_8 para tres valores de K



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$



(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$



(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

Figura B.9: Reglas FIS V4_9 para tres valores de K

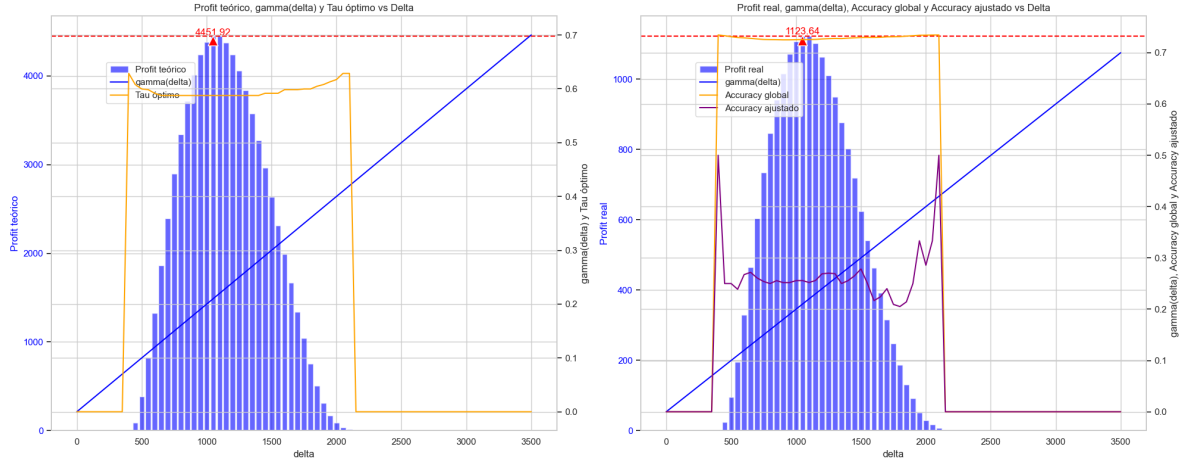
Evaluación Comparativa del Beneficio Teórico vs. Beneficio Real en Campañas de retención

Podemos observar las figuras B.10, que tienen una línea roja a trazos, la cual indica el profit máximo.

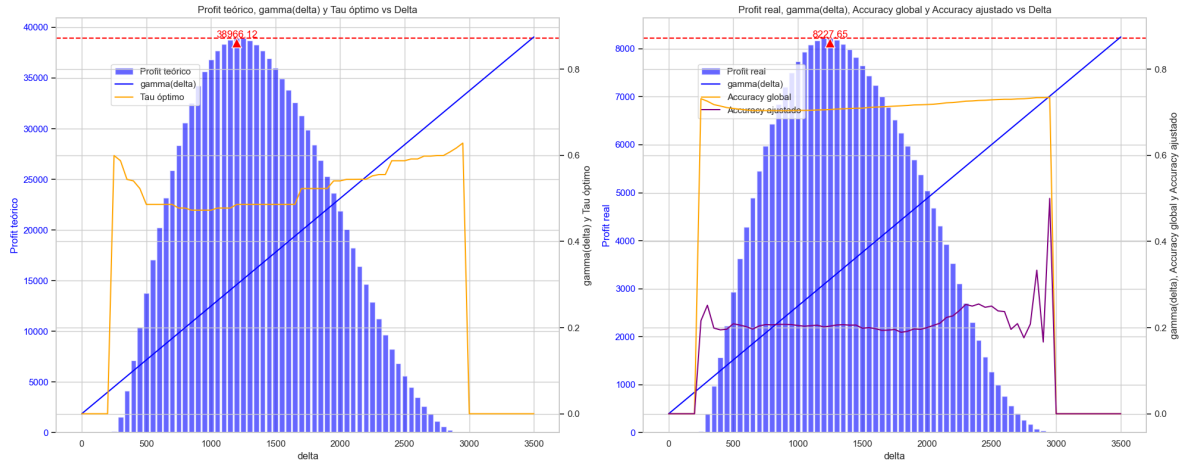
Los gráficos proporcionan una visualización comparativa del beneficio teórico y el beneficio real. El beneficio teórico representa el rendimiento proyectado de todos los clientes a los que se dirigió la campaña, bajo la suposición de que se logra captar a todos estos clientes. En contraste, el beneficio real excluye a aquellos que no son clientes que abandonan (churners), concentrándose únicamente en los clientes efectivamente captados, lo que permite calcular la precisión ajustada, equivalente a la sensibilidad.

Se incorporó un término adicional, $-A$, que representa un costo base generalizado, lo que explica la disparidad en las magnitudes de los gráficos. Por ejemplo, una gráfica muestra un valor de 4451 mientras que la otra muestra 1123. Esta diferencia se debe a que el gráfico de la derecha se construye exclusivamente con los churners confirmados, cruzando estos datos con la base de datos real. La línea que atraviesa el gráfico sirve como referencia para la evolución de la relación γ/δ .

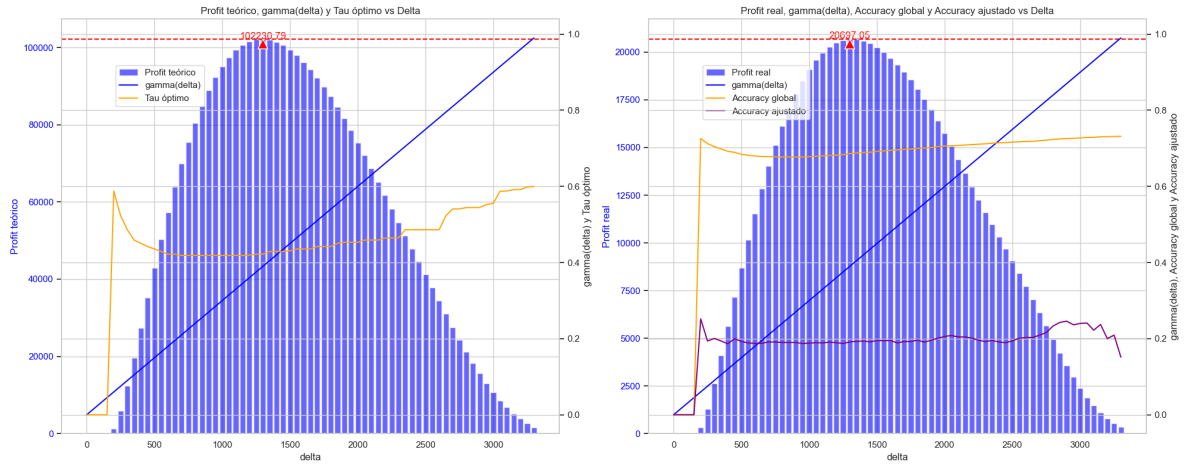
En la figura de la izquierda, el color amarillo ilustra la evolución del Tau óptimo. En la figura de la derecha, se muestra la precisión global (accuracy) que compara la predicción del churn realizada mediante el modelo de Mamdani con los datos reales. La precisión ajustada, por su parte, se obtiene al excluir a los no churners y enfocarse únicamente en los churners, permitiendo evaluar con mayor precisión la efectividad de la campaña al verificar cuántos churners fueron correctamente identificados.



(a) Métricas de rendimiento para $K = 0,0002$



(b) Métricas de rendimiento para $K = 0,00025$



(c) Métricas de rendimiento para $K = 0,0003$

Figura B.10: Reglas FIS V4_3LR para tres valores de K

Apéndice C

Optimización de mapas de control estratégico

C.1. Revisión bibliográfica

El enfoque del Balanced Scorecard (BSC) es un sistema de planificación estratégica ampliamente adoptado en el ámbito empresarial e industrial. En esencia, el BSC es un sistema de gestión que permite a las organizaciones definir claramente sus objetivos y estrategias, y luego implementarlos de manera efectiva Olson & Slater (2002). Kaplan y Norton introdujeron el concepto de BSC en 1992, y este se aplicó inicialmente como un sistema de evaluación del rendimiento, específicamente en 12 empresas estadounidenses ese mismo año. El objetivo principal del BSC era sustituir y modificar el modelo tradicional de evaluación del rendimiento, el cual se enfocaba exclusivamente en los índices financieros, para proporcionar una evaluación más integral y eficaz del rendimiento organizacional mediante la aplicación de este modelo (Kaplan & Norton, 1992; Robert, 1992).

Aunque el aspecto financiero sigue siendo considerado el más importante en la evaluación del rendimiento organizacional dentro del BSC, también se deben considerar otros aspectos del modelo tradicional, como el cliente, los procesos internos de la empresa y el crecimiento y aprendizaje de los empleados. Estos componentes adicionales son esenciales para lograr un mayor equilibrio y eficacia en la evaluación del rendimiento en comparación con el enfoque anterior. La integración de estos aspectos es crucial para

la percepción y aplicación de un sistema de evaluación del rendimiento completo y la formación de un conjunto general de indicadores de rendimiento organizacional, lo cual es fundamental para la investigación estratégica de todos los objetivos y actividades de una organización.

El autor Kaplan et al. (2000), Kaplan & Norton (2000), Kaplan & Norton (2001b) definió el Balanced scorecard (BSC) como una metodología asociada a la gestión y planificación de organizaciones y su objetivo es apoyar a éstas a convertir o traducir su misión y estrategia en indicadores (Kaplan & David, 1996; Kaplan & Norton, 2007). Su implementación requiere de un mapa estratégico y claridad sobre los logros esperados a corto, mediano y largo plazo Kaplan & Norton (2004). El BSC considera cuatro perspectivas: Financiera, Cliente, Procesos internos, Aprendizaje y crecimiento, las cuales deben estar alineadas a la misión de la organización. Cada una de estas perspectivas incluye un conjunto de objetivos estratégicos y sus respectivos indicadores de desempeño.

Existe una relación causal entre algunos objetivos estratégicos de estas perspectivas. Por ejemplo, la mejora en los objetivos de la perspectiva de aprendizaje y crecimiento, conduce a avances en los objetivos de los procesos internos. Mejores procesos internos, a su vez, permiten a la organización generar un mayor valor para los clientes, lo que se traduce en el logro de los objetivos financieros.

Esta secuencia de relaciones se representa en un mapa estratégico, el cual visualiza la interconexión entre todos los objetivos estratégicos Kaplan & Norton (2004). Un mapa estratégico constituye un método eficaz para representar y comprender la estrategia de una empresa Kaplan et al. (2000).

El autor Acuña-Carvajal et al. (2019) definió el BSC como una herramienta de gestión que facilita el análisis de resultados y la toma de decisiones según el modelo desarrollado por Kaplan & Norton en 1992. Otros autores como Ahn (2001), Malina & Selto (2001), Fernández (2001), Olson & Slater (2002), Atkinson (2006), Othman (2006), Kunc (2008), Reisdorfer et al. (2010), Gallego et al. (2013), Quezada & López-Ospina (2014), Hintze (2015), Cao et al. (2015), Eftimov et al. (2016), Rahimnia & Kargozar (2016), coinciden con esta definición.

Autores como Kaplan & Norton (2001a), Quezada et al. (2009), Chytas et al. (2011), Huang et al. (2011), Jassbi et al. (2011), Wu (2012), Valmohammadi & Sofiyabadi

(2015), Rahimnia & Kargozar (2016), López-Ospina et al. (2022), concuerdan que los objetivos estratégicos son específicos para cada organización al abordar la elaboración de mapas de BSC para describir y comunicar la estrategia, desagregar la visión y mostrar la relación causa-efecto entre los objetivos de cada perspectiva.

En la etapa de elaboración de mapas de BSC, se pueden identificar al menos las siguientes tendencias de investigación, algunos autores proponen modelos teóricos de BSC para contextos reales específicos como: Bigliardi & Ivo Dormio (2010), Bigliardi & Bottani (2010), otros autores utilizan modelos cuantitativos y cualitativos como por ejemplo: Kunc (2008), Quezada & Quinteros (2011), López-Ospina et al. (2017), y otros autores lo hacen utilizando métodos multicriterios como son: Berumen & Llamazares Redondo (2007), Tseng (2010), Jassbi et al. (2011), Lee et al. (2011), Wu (2012), Quezada et al. (2013), Ernesto Quezada and et al. (2014), Quezada & López-Ospina (2014), Chen (2015), Asgari & Darestani (2017), López-Ospina et al. (2017), Quezada et al. (2018), Acuña-Carvajal et al. (2019), Wątróbski et al. (2019), Quezada et al. (2022), Quezada et al. (2022), López-Ospina et al. (2022), para apoyar el proceso de toma de decisiones. Otros autores como Farhangi et al. (2002), Lin & Wu (2004), Lin & Wu (2008), Heydariyeh et al. (2012), Jassbi et al. (2011), Acuña-Carvajal et al. (2019), Moraga et al. (2020), Quezada et al. (2022), López-Ospina et al. (2022), han abordado la elaboración de mapas utilizando el método multicriterio DEMATEL difuso para convertir, visualizar y cuantificar las relaciones causa-efecto entre criterios de cada problema. Nuestro foco se enmarca en esta área considerando la lógica clásica de Balanced Scorecard (BSC).

C.1.1. Método DEMATEL

El método DEMATEL (Decision-Making Trial and Evaluation Laboratory) fue inicialmente desarrollado en el Battelle Memorial Institute del Centro de Investigación de Ginebra. En su origen, este método se utilizó para abordar problemas complejos a nivel mundial, tales como la hambruna, la protección ambiental y la energía Fontela & Gabus (1976). DEMATEL es una herramienta de toma de decisiones multi-criterio que permite transformar diseños cualitativos en análisis cuantitativos Lee et al. (2011). El propósito de DEMATEL es traducir las relaciones entre diversos criterios y dimensiones causales de un sistema complejo en un modelo estructural comprensible de dicho sistema Dalalah et al. (2011). Todos los criterios dentro de un sistema están interrela-

cionados, ya sea de manera directa o indirecta, en un sistema general recíproco. Por lo tanto, cualquier modificación en uno de los criterios afectará a los demás Tzeng et al. (2007). Esta técnica ha sido aplicada exitosamente en diversas circunstancias, como en sistemas de gestión, métodos de desarrollo, gestión del conocimiento y evaluación electrónica del aprendizaje, entre otros Kuo & Liang (2011). Diversas entidades en países como Japón, Corea y Taiwán han empleado ampliamente la técnica DEMATEL para resolver eficazmente distintos problemas en varios campos Lin & Wu (2008).

El DEMATEL es una metodología de decisión multi-criterio que también tiene enorme aplicación en estrategias de mercadeo, problemas de seguridad, evaluación de aprendizaje electrónico, entre muchos otros Heydariyeh et al. (2012). De igual manera, es una herramienta de análisis de criterios que se utiliza para visualizar la estructura de las relaciones causales y su resultado se expone como un diagrama de causalidad Acuña-Carvajal et al. (2019). Entre sus principales objetivos están: ayudar a reconocer que no están claras las preferencias entre los objetivos estratégicos y convertir estas dificultades en valores numéricos. Asimismo, analizar la asociación entre objetivos y mapas estratégicos Acuña-Carvajal et al. (2019). También esta metodología soporta la toma de decisiones en grupo, de carácter complejo, y ha tenido una amplia aplicación en la construcción de mapas estratégicos.

El método DEMATEL busca la recolección de conocimiento para delinear relaciones causales entre los objetivos estratégicos de la organización. Para construir un modelo estructural preliminar del mapa estratégico, por lo general se debe reunir a los expertos para que realicen evaluaciones que establezcan las interconexiones entre los objetivos, lo cual constituye un proceso intrínseco de toma de decisiones grupal. En este contexto, se implementó el DEMATEL difuso para analizar y optimizar esta tarea, facilitando así a los tomadores de decisiones la obtención de resultados más precisos y pertinentes Lee et al. (2011).

Cabe destacar que, para un grupo de personas, llegar a un consenso sobre la importancia relativa de los objetivos o sobre la influencia de un objetivo sobre otro es una tarea intrínsecamente desafiante. Así, obtener un resultado claro que represente con fidelidad las opiniones de los expertos es una tarea compleja que frecuentemente produce resultados subóptimos. En un contexto de toma de decisiones grupal, con cada participante teniendo preferencias divergentes, y donde el proceso de toma de decisiones es

complejo y crítico para la estrategia organizacional, cuantificar los resultados es un reto significativo que puede poner en riesgo el futuro de la empresa.

Es por esto, que se recurrió a una forma de medición oportuna que permitirá cuantificar de la mejor forma la influencia y la "fuerza" existente entre los objetivos estratégicos que componen al mapa estratégico. De esta necesidad surgió la aplicación del DEMATEL difuso, una extensión que incorpora la lógica difusa Lin & Wu (2004). A continuación se presenta un resumen de los pasos necesarios para la implementación de esta técnica:

1. En primer lugar, se deben especificar los factores de evaluación según la opinión del Comité de Expertos (es decir, los p líderes) con los antecedentes de investigación.
2. Seguidamente, se determina la influencia de cada factor en el conjunto del sistema, según la opinión de los expertos. Para ello, utilizamos las expresiones del cuadro C.1. Se establece una escala lingüística difusa para la calificación de relaciones, en la cual cada valor de la escala se asocia con un número triangular difuso que cuantifica el nivel de influencia o causalidad representado por un término lingüístico Valmohammadi & Sofiyabadi (2015). Cada término lingüístico tiene tres valores numéricos (niveles) triangulares difusos: un valor mínimo λ , un valor intermedio m , y un valor máximo μ .

Término lingüístico	Valor difuso (λ, m, μ)
Alto	(0.5, 0.75, 1)
Medio Alto	(0.25, 0.5, 0.75)
Bajo	(0, 0.25, 0.5)
Medio Bajo	(0, 0, 0.25)
Nulo	(0, 0, 0)

Cuadro C.1: Relación entre término y valor lingüístico

3. Los n objetivos estratégicos son organizados en una matriz de calificación conforme a las perspectivas del Balanced Scorecard (BSC) con el fin de realizar la medición causa-efecto de las relaciones entre objetivos (Wu & Lee, 2007; Wu et al., 2011; Wu, 2012; Valmohammadi & Sofiyabadi, 2015). En esta matriz, se solicita a cada experto que cuantifique el grado de influencia de cada objetivo sobre los demás en términos de causalidad, empleando la escala lingüística previamente definida. Las relaciones no viables son excluidas para garantizar que el mapa estratégico cumpla con las condiciones lógicas establecidas por Kaplan y Norton.

4. A partir de las calificaciones realizadas por el comité ($k = 1, \dots, p$), se obtiene la matriz difusa de relaciones directas Z^k de cada uno de los calificadores (1), compuesta por los valores difusos Z_{ij} (2) (Wu & Lee, 2007; Wu et al., 2011; Wu, 2012; Valmohammadi & Sofiyabadi, 2015). Cada matriz Z^k es en realidad 3 matrices, cada una compuesta por los valores δ , m , μ , respectivamente según la puntuación por cada experto, que traduzcan el valor lingüístico asignado a la relación entre objetivos en los distintos niveles de números triangulares difusos (δ, m, μ) según el paso 2.

$$Z^k = \begin{bmatrix} 0 & Z_{12}^{(k)} & \cdots & Z_{1n}^{(k)} \\ Z_{21}^{(k)} & 0 & \cdots & Z_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1}^{(k)} & Z_{n2}^{(k)} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad k = 1, \dots, p \quad (\text{C.1})$$

Donde

$$Z_{ij}^{(k)} = (\lambda_{ij}^{(k)}, m_{ij}^{(k)}, \mu_{ij}^{(k)}) \quad (\text{C.2})$$

Los valores de los números difusos triangulares $a_i^{(k)}$ permiten encontrar un factor normalizado para cada experto k , denominado β_k Valmohammadi & Sofiyabadi (2015):

$$a_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n Z_{ij}^{(k)} = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{(k)}, \sum_{j=1}^n m_{ij}^{(k)}, \sum_{j=1}^n \mu_{ij}^{(k)} \right) \quad (\text{C.3})$$

$$\beta_k = \max_{i=1, \dots, n} a_i^{(k)} \quad (\text{C.4})$$

Es posible obtener una matriz difusa normalizada $\tilde{X}^k$ de la siguiente manera:

$$\tilde{X}^k = \frac{1}{\beta_k} Z^k \quad (\text{C.5})$$

5. Se calcula la matriz difusa normalizada $\tilde{X}$ (Wu & Lee, 2007; Wu et al., 2011; Wu, 2012; Valmohammadi & Sofiyabadi, 2015), que corresponde al promedio de las matrices de relaciones directas difusas normalizadas $\tilde{X}^k$ de los evaluadores:

$$\tilde{X} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \tilde{X}^k \quad (\text{C.6})$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{11} & \tilde{X}_{12} & \cdots & \tilde{X}_{1n} \\ \tilde{X}_{21} & \tilde{X}_{22} & & \tilde{X}_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{X}_{n1} & \tilde{X}_{n2} & \cdots & \tilde{X}_{nn} \end{bmatrix}$$

Donde,

$$\tilde{X}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^p \tilde{X}_{ij}^k}{p}$$

$$\tilde{X} = [X_\lambda, X_m, X_\mu]$$

6. La matriz difusa de relaciones totales se obtiene mediante la serie geométrica descrita en (2.7) que converge en (2.8) (Wu & Lee, 2007; Wu et al., 2011; Wu, 2012; Valmohammadi & Sofiyabadi, 2015). Esta matriz representa las relaciones causales directas e indirectas totales entre cada par de objetivos.

$$\tilde{T} = \lim_{w \rightarrow \infty} (\tilde{X}^1 + \tilde{X}^2 + \cdots + \tilde{X}^w), \quad (\text{C.7})$$

$$\tilde{T} = \tilde{X} \cdot (I - \tilde{X})^{-1}, \quad (\text{C.8})$$

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & \cdots & \tilde{T}_{1n} \\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22} & \cdots & \tilde{T}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{T}_{n1} & \tilde{T}_{n2} & \cdots & \tilde{T}_{nn} \end{bmatrix}$$

Cada valor de esta matriz corresponde a un número triangular difuso, es decir, que se obtuvieron tres matrices de relaciones totales: una para los valores mínimos, una para los valores intermedios y otra para los valores máximos.

Donde,

$$\tilde{T}_{ij} = (\lambda'_{ij}, m'_{ij}, \mu'_{ij}) \quad (\text{C.9})$$

$$\text{Matriz } [\lambda'_{ij}] = X_\lambda \cdot (I_\lambda - X_\lambda)^{-1}$$

$$\text{Matriz } [m'_{ij}] = X_m \cdot (I_m - X_m)^{-1}$$

$$\text{Matriz } [\mu'_{ij}] = X_\mu \cdot (I_\mu - X_\mu)^{-1}$$

7. Obtenidas las matrices de relaciones totales para los distintos niveles k , se defuzzificaron usando el método del Primer Índice de Yager, Atiencina & García (2012)(C.10), que es un promedio ponderado de los valores numéricos mínimo, intermedio y máximo, Ruan (2012). Este paso permitió mitigar la incertidumbre del modelo, convirtiendo los valores o números triangulares difusos en una puntuación "*aguda*" o en un valor unificado para cada relación causa-efecto y que relacionara los objetivos estratégicos. Así, se obtiene la matriz final de relaciones totales F , donde cada valor F_{ij} de la matriz representa el nivel de influencia total de un objetivo i dado en el logro del objetivo j .

$$F_{ij} = Y\tilde{T}_{ij} = \frac{1}{3}(\lambda'_{ij} + m'_{ij} + \mu'_{ij}) \quad (\text{C.10})$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} \end{bmatrix}$$

8. Finalmente, se realiza un análisis de causalidad (Wu & Lee, 2007; Wu et al., 2011; Wu, 2012; Valmohammadi & Sofiyabadi, 2015) para determinar cuáles objetivos son los más importantes para la empresa y cuáles son sus clasificaciones (tipo causa o tipo efecto). En primer lugar, usando la matriz F resultante, se calcularon " D " y " R ", los cuales representan la suma de las filas y columnas que indican el nivel de influencia y de relación que existe entre objetivos respectivamente, como se muestra en (C.8) y (C.9).

$$D_i = \sum_{j=1}^n F_{ij} \quad (\text{C.11})$$

$$R_j = \sum_{i=1}^n F_{ij} \quad (\text{C.12})$$

El valor $(D + R)$ representa la importancia de cada uno de los objetivos o la fuerza de

las relaciones de entrada y salida e indica el "nivel de función central" de cada uno de los objetivos.

El valor $(D - R)$ representa el "tipo de influencia." si el objetivo es una causa o efecto del otro. Si $(D-R)$ es positivo, el objetivo es una meta-causa, es decir, debe tener una prioridad más alta en la estrategia. Por otro lado, si es un valor negativo, es un efecto objetivo o un objetivo de salida.

En el cuadro C.2, se muestra el diseño metodológico de la técnica aplicada DEMATEL difuso que aborda un análisis de relaciones entre objetivos utilizando un enfoque basado en mapas estratégicos, específicamente siguiendo las condiciones propuestas por Kaplan & Norton (2004). Se presentan distintos pasos para evaluar la influencia de un objetivo sobre otro, utilizando escalas lingüísticas para clasificar estas influencias. Se describe cómo se deben llenar las matrices de influencia inicial y cómo se interpretan los resultados para entender mejor las interacciones entre los diferentes objetivos establecidos en un mapa estratégico. Este método proporciona una forma estructurada de evaluar y visualizar la influencia que un objetivo puede tener sobre otros en un contexto organizacional.

Pasos	Descripción
1. Selección de comité de expertos	Se seleccionan los expertos, quienes son responsables de evaluar las relaciones de causa-efecto entre los objetivos y evaluar el mapa estratégico resultante.
2. Diseño de la escala lingüística difusa	Establecer la forma de llenar la matriz de influencia inicial y diseñar la escala lingüística.
3. Medición causa-efecto de las relaciones entre objetivos	Cada persona del comité asigna sus propios valores lingüísticos. En este paso, se obtiene la matriz de influencia al preguntar sobre la influencia de cada objetivo en los demás. La pregunta fue: "Si se logra el objetivo estratégico X, ¿cuál sería el impacto en el objetivo estratégico Y?". Las escalas lingüísticas son: Alto (A), Medio Alto (MA), Bajo (B), Medio Bajo (MB) y Nulo (N). Una "Nula" significa sin impacto directo de un objetivo sobre otro, mientras que "Alta" significa una influencia directa y muy fuerte. Basado en Kaplan y Norton (2004), algunas celdas fueron completadas o bloqueadas a priori.
4. Matrices difusas de relaciones directas	Con los valores lingüísticos de cada experto, se calcularon las matrices mínima, intermedia y máxima según la información del Paso 2. Luego, se normalizó cada matriz usando las ecuaciones (3)-(5).
5. Cálculo de la matriz media de relaciones directas	Después de calcular las matrices, se obtiene X, compuesta por tres matrices según la estructura del número difuso triangular, denotadas como X_λ , X_m y X_u (Ecuación 6).
6. Cálculo de la matriz difusa de relaciones totales	Este paso proporciona la matriz para los números triangulares T, donde cada matriz $T_{ij} = (\lambda"_{ij}, m"_{ij}, u"_{ij})$ se calcula con la ecuación (9), permitiendo obtener una medición difusa de las relaciones totales entre los objetivos.
7. Defuzzificación de matrices	Se obtiene la matriz de relaciones totales Fij mediante el índice de Yager (Ecuación 10).
8. Análisis de causalidad	Se realiza un análisis del agregado de causalidad usando las ecuaciones (11) y (12) para obtener los indicadores $(D+R)$ "nivel de rol central" y $(D-R)$ "tipo de influencia" para cada objetivo.

Cuadro C.2: Pasos para la técnica aplicada: DEMATEL difuso.

C.1.2. Optimización multicriterio

La teoría de la decisión multicriterio (MCDM, por sus siglas en inglés de Multiple Criteria Decision Making) es una metodología robusta empleada para enfrentar escenarios complejos de toma de decisiones, en los cuales se evalúan diversos factores simultáneamente en lugar de basarse en un solo criterio. Este enfoque integral permite considerar una multiplicidad de criterios relevantes para la toma de decisiones Ishizaka & Nemery (2013).

El proceso de toma de decisiones multicriterio, involucra una secuencia estructurada de etapas, que abarca desde la identificación del problema hasta la construcción de preferencias, la evaluación de alternativas y la selección de las opciones óptimas Hwang et al. (1981). De igual modo, el enfoque de la decisión multicriterio se fundamenta en la resolución de problemas mediante modelos matemáticos, partiendo de un conjunto predefinido de alternativas Majumder (2015).

Un problema de optimización multicriterio se caracteriza por la consideración simultánea de múltiples funciones objetivo, las cuales deben ser optimizadas (minimizadas o maximizadas) de manera concurrente (Statnikov & Matusov, 2012; Eschenauer et al., 2012). Según Miettinen (1999), formalmente un problema de esta naturaleza con n variables, m funciones objetivo, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y k restricciones, puede ser representado de la siguiente forma:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Min } (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) \\ \text{sujeto a } x \in S. \end{cases}$$

Se denomina vector de decisión a cualquier elemento perteneciente al conjunto S . En este caso, el vector de función objetivo se denota como $\mathbf{F}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))^T$ y el vector de variables de decisión como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in S$. Además, se tiene la región objetivo factible $Z = f(S)$, que es un subconjunto del espacio objetivo $\mathbb{R}^k$ Miettinen (1999).

En este contexto el objetivo es lograr la minimización simultánea de todas las funciones objetivo. En un escenario ideal donde no existe conflicto entre estos objetivos, es decir, donde la minimización de una función no provocara el incremento de otra, sería posible identificar una solución que minimice todas las funciones de manera conjunta y cada

función objetivo alcance su óptimo. Para este tipo de modelo se afirma que no es posible encontrar una sola solución que sea óptima con respecto a cada función objetivo.

En la evaluación de decisiones multicriterio, la normalización de criterios y la optimalidad de Pareto son conceptos clave. La normalización de criterios es una técnica esencial que implica la estandarización de los valores de las variables a una escala común previamente definida, con el propósito de facilitar la comparación entre diferentes variables (Hair, 2014; Tusell, 1999). Esta práctica es crucial debido a la diversidad de escalas y unidades empleadas para medir los distintos criterios en los contextos de toma de decisiones Romero (1996).

En el ámbito de la toma de decisiones multicriterio, el concepto de optimalidad de Pareto es fundamental, ya que define un conjunto de soluciones que se consideran óptimas desde una perspectiva de eficiencia. Según Romero (1996), este concepto implica que no es posible mejorar un atributo sin comprometer el rendimiento en al menos otro atributo. La noción de soluciones eficientes o Pareto-óptimas ha adquirido una notable relevancia en diversos dominios, tales como la economía, la ciencia de la negociación y la teoría contemporánea de la toma de decisiones multicriterio (Thakkar, 2021; Munier et al., 2019).

Para manejar la complejidad inherente a los problemas de toma de decisiones, es imperativo recurrir a métodos multicriterio Munda et al. (2008). Dichos métodos constituyen enfoques sistematizados que integran diversas dimensiones, objetivos, criterios y sus respectivas puntuaciones dentro de un marco estructurado para la toma de decisiones. Esto permite ofrecer un marco analítico y cuantitativo que facilita la evaluación y comparación objetiva de múltiples alternativas, optimizando la selección de la opción más adecuada.

Los métodos de toma de decisiones multicriterio se segmentan en distintas categorías, destacándose principalmente la toma de decisiones con múltiples atributos (MADM) y la toma de decisiones con múltiples objetivos (MODM). Los métodos MADM permiten la evaluación sistemática de alternativas discretas al considerar una extensa variedad de atributos. Estas metodologías resultan especialmente valiosas al abordar problemas con múltiples atributos diversos, ya que ofrecen un enfoque sistemático para la comparación y evaluación de alternativas Thakkar (2021).

Los métodos MODM se enfocan en analizar el conflicto entre diversos objetivos y en

identificar la solución óptima. Estos enfoques reconocen que los objetivos pueden estar en competencia y se esfuerzan por equilibrar estos conflictos para determinar la solución más adecuada posible.

Romero (1996) destaca la relevancia de la optimización multiobjetivo en el proceso de toma de decisiones al intentar maximizar simultáneamente varios objetivos sujetos a ciertas restricciones. En lugar de perseguir un óptimo único, este enfoque se orienta hacia la identificación de un conjunto de soluciones eficientes o Pareto-óptimas Miettinen (1999). Este método permite gestionar de manera eficaz situaciones que requieren un equilibrio entre múltiples metas, teniendo en cuenta las limitaciones presentes.

La programación multiobjetivo emplea un enfoque técnico para resolver problemas de toma de decisiones, considerando los atributos de la situación a través de restricciones y formulaciones matemáticas, sin incluir información sobre las preferencias del decisor (Miettinen, 1999; Romero, 1996).

La implementación de la herramienta BSC ha sido objeto de severas críticas. Una de las principales objeciones es que el modelo asigna igual prioridad a todos los objetivos estratégicos Chytas et al. (2011), sin considerar la subjetividad inherente a los tomadores de decisiones, lo cual resulta en una omisión significativa de la incertidumbre López-Ospina et al. (2017). Asimismo, entre estas críticas se señala que muchas empresas aún no han desarrollado la capacidad de interpretar o cuantificar de manera eficaz los resultados positivos obtenidos y de mantenerlos consistentemente a lo largo del tiempo. De esta manera, se resume que ningún estudio ha logrado proporcionar una metodología BSC completa y adaptada para su implementación en situaciones reales. Para mejorar esta herramienta, Acuña-Carvajal et al. (2019) propusieron un modelo que integra los avances realizados por diferentes autores de manera independiente. Estos avances incluyen los métodos de toma de decisiones multicriterio Asgari & Darestani (2017), la metodología DEMATEL (laboratorio de prueba y evaluación para la toma de decisiones) Wu (2012) y los métodos híbridos que buscan combinar estos enfoques con la teoría difusa y la programación lineal López-Ospina et al. (2017).

Considerando lo anterior, en el presente estudio se desarrolla una nueva versión del modelo propuesto por Acuña-Carvajal et al. (2019), bajo un enfoque renovado como modelo matemático de programación lineal con optimización multicriterio. El objetivo es obtener un modelo que se adapte de manera más efectiva a la realidad.

C.2. Metodología: Optimización de mapas de control estratégico

En este estudio utilizamos la metodología fuzzy DEMATEL para identificar las relaciones de causalidad dentro del mapa estratégico y eliminar la subjetividad o sesgo que se genera en la definición de la importancia y prioridad que tienen los objetivos estratégicos, para ayudar a conocer que no están claras las preferencias entre los objetivos estratégicos y convertir estas dificultades en valores numéricos. Asimismo, se está incluyendo dentro del desarrollo metodológico, la aplicación de otros métodos para evaluar su funcionalidad y comparación.

El esquema de comparación de métodos para esta investigación respecto a la optimización de mapas de control estratégico de Balances Scorecard (BSC), se presenta en el cuadro C.3, en donde se pretende indicar lo que hacen (✓) versus lo que no hacen (X) las distintas metodologías utilizadas por algunos autores y comparativamente relacionar las distintas columnas, por ejemplo: herramientas de análisis multicriterio versus modelos de optimización de programación lineal, modelo de optimización con múltiples funciones objetivo versus MCDA, etc. Esto posibilita visualizar las ventajas que contempla nuestra propuesta de investigación, los métodos y modelos empleados, lo que permite orientarse, por ejemplo, a un objetivo más que al otro respecto al nivel de cumplimiento. Asimismo, permite orientarse a saber cuáles son los proyectos más relevantes para la empresa.

Autor	Características/Métodos						
	MAPAS ESTRATÉGICOS	PROYECTOS	NIVELES DE CUMPLIMIENTO	HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS MULTICRITERIO	LÓGICA DIFUSA	MODELOS DE OPTIMIZACIÓN	MODELO DE OPTIMIZACIÓN CON MÚLTIPLES FUNCIONES OBJETIVO
López-Ospina et al., 2022	✓	X	X	DEMATEL	✓	X	✓
Quezada et al., 2022	✓	✓	X	DEMATEL	X	X	X
Quezada et al., 2021	✓	X	X	ANP	X	X	X
Moraga et al., 2020	✓	X	X	DEMATEL + K-MEANS	X	X	X
Acuña-Carvajal et al., 2019	✓	X	X	DEMATEL	✓	✓	X
Quezada et al., 2018	✓	X	X	ANP + DEMATEL	X	X	X
López-Ospina et al., 2017	✓	X	X	DEMATEL	X	✓	X
Quezada et al., 2014	✓	X	X	AHP	X	X	✓
Quezada et al., 2013	✓	X	X	AHP	X	X	X
Nuestra propuesta	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Simbología: ✓ Lo que hace la metodología X Lo que no hace la metodología

Cuadro C.3: Comparación de metodologías en mapas estratégicos

De igual forma, en la metodología estamos contribuyendo con un modelo de optimización multicriterio que considera tres funciones objetivos normalizadas y ponderadas por sus respectivos pesos ω_x con $x \in [1, 2, 3]$ y la aplicación del método de la suma ponderada; entonces se puede construir la frontera eficiente de soluciones respecto de los objetivos y se cumplirá para valores de ω tal que: $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$.

Entonces se puede construir la frontera eficiente de soluciones respecto de los objetivos, y se cumplirá para valores de ω tal que: $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$.

Por su parte, el modelo de optimización de diseño de mapas de control estratégico busca obtener mapas estratégicos y estudiar el comportamiento de las tomas de decisiones cuando se presentan distintos escenarios. Pretende determinar cuáles objetivos y relaciones incluir en el mapa, cuáles proyectos realizar y además establecer qué nivel de cumplimiento tienen los objetivos estratégicos que optimizan el modelo. Aunque se plantee su procedimiento metodológico, este estudio quedará relegado a un estado .^{en} curso no como el foco principal de esta tesis.

La aplicación de un modelo de optimización multicriterio radica en las contradicciones inherentes a la construcción de mapas estratégicos, donde se busca incorporar la mayor cantidad posible de relaciones causales para capturar su influencia. Sin embargo, la inclusión excesiva de dichas relaciones puede comprometer la claridad y comprensión del mapa estratégico, desviándolo de su propósito de representar la estrategia organizacio-

nal de manera efectiva. Así, se logra un equilibrio adecuado mediante la aplicación de un modelo multiobjetivo López-Ospina et al. (2022).

La investigación actual se enfoca en desarrollar mapas estratégicos que maximicen la efectividad mientras minimizan los costos asociados. Simultáneamente, se examina el comportamiento de las decisiones bajo diversos escenarios. El objetivo es identificar qué objetivos deben ser incorporados en el mapa estratégico, cuáles proyectos deben ser ejecutados, qué relaciones causales deben ser incluidas y el nivel de cumplimiento de los objetivos que optimizan el modelo multicriterio.

Para alcanzar el objetivo de estudio, se utiliza un BSC a través de un problema de programación lineal con optimización multicriterio. Este enfoque integra proyectos destinados a la consecución de objetivos estratégicos, asigna ponderaciones entre las funciones objetivo y obtiene el nivel de cumplimiento de los objetivos. Estas incorporaciones representan innovaciones respecto a los estudios previos de (Acuña-Carvajal et al., 2019; López-Ospina et al., 2022).

En cuanto al desarrollo sistemático de mapas estratégicos de BSC utilizando lógica difusa y modelos de optimización multicriterio, la metodología se divide en varias etapas:

- 1) Identificación de objetivos estratégicos: Se seleccionaron los objetivos estratégicos de acuerdo con las cuatro perspectivas del BSC (aprendizaje y crecimiento, procesos internos, clientes y financiera) basados en la misión y visión de una unidad de la organización.
- 2) Construcción del Mapa estratégico: Se aplicó la metodología de decisión multicriterio (MCDM) DEMATEL apoyado en criterios difusos para establecer relaciones entre los objetivos y definir los niveles de influencia. Se clasificaron los objetivos como de tipo causa y de tipo efecto que hacen parte de la estrategia, así como su impacto en los diferentes niveles del mapa.
- 3) Análisis de Relaciones: La aplicación de este método da como resultado la matriz de relaciones totales T_{ij} que representa las relaciones entre los objetivos estratégicos de la organización. Se identificaron las relaciones más importantes, especialmente aquellas que se originan en la perspectiva de aprendizaje y crecimiento y finalizan en la perspectiva financiera. Para obtener un primer modelo estructural del mapa estratégico, por lo general se debe reunir a los expertos para que realicen juicios que permitan establecer las relaciones entre objetivos. El método DEMATEL difuso se implementó en este proceso para analizar y facilitar el trabajo de los tomadores de decisiones, con el objetivo de obtener resultados más precisos y exactos.

Por esta razón, se recurrió a una metodología de medición adecuada que permitiera cuantificar de manera más precisa la influencia y la *intensidad* existente entre los objetivos estratégicos que conforman el mapa. Inicialmente, los expertos determinarán el nivel de influencia de cada objetivo en la consecución de los demás utilizando escalas lingüísticas difusas. Esto significa que los expertos definirán el nivel de relación entre los objetivos del mapa por medio de términos lingüísticos (alto, medio alto, medio bajo, bajo, nulo), a los cuales se les asigna valores difusos que expresan los diferentes grados de influencia o causalidades que puedan tomar. En este paso, se obtiene la matriz de influencia inicial preguntando sobre la influencia de cada objetivo sobre todos los demás. La pregunta es: **“Si se logra el objetivo estratégico x , ¿cuál sería el impacto en el objetivo estratégico y ?”** y de esta forma se llena la matriz dando inicio a la aplicación del algoritmo (ver más detalle del cuestionario realizado a los expertos para obtener las relaciones mencionadas en apéndice D. 4) Análisis de Causalidad: Se realizó un análisis de causalidad para obtener indicadores (D+R) “nivel de rol” y (D-R) “tipo de influencia” para cada objetivo, los cuales determinan el nivel de importancia que tiene cada objetivo partícipe de la estrategia y el tipo de objetivo que es, respectivamente. 5) Calificación de Objetivos: Los expertos calificaron cada objetivo estratégico en función de su factibilidad, inteligibilidad y utilidad. Estas calificaciones se utilizaron para calcular la ponderación final U_i de cada objetivo y eliminar los menos relevantes para la estrategia de la organización. 6) Modelo de Optimización Multicriterio: Se planteó un modelo matemático de programación lineal con optimización multicriterio que tiene tres funciones objetivo: maximización de los objetivos financieros, minimización de las relaciones entre objetivos estratégicos y maximización del nivel de cumplimiento N_i de los objetivos. 7) Implementación del Modelo: El modelo de optimización se implementó en el lenguaje de programación Python TM para distintos escenarios de estudio, incluyendo un caso base, un caso general y un escenario de limitación de presupuesto. Esta parte del informe se enmarca en proponer un nuevo enfoque para los modelos planteados en trabajos previos de Acuña-Carvajal et al. (2019) y López-Ospina et al. (2022) y brindar una herramienta útil para la toma de decisiones estratégicas en organizaciones. Los resultados obtenidos se evalúan en función de las diferentes combinaciones de ponderadores y se busca entender cómo las funciones objetivo influyen en la estrategia final.

C.2.1. Enfoque matemático

El modelo de optimización de mapas de control estratégico tiene tres funciones objetivo, tales como: (1) la maximización de los objetivos financieros, (2) la minimización de las relaciones entre objetivos estratégicos y (3) la maximización del nivel de cumplimiento N_i de los objetivos. En este modelo se obtiene qué objetivos incluir en el mapa, qué proyectos seleccionar y cuáles relaciones entre objetivos se incluyen también en el mapa. Además de establecer qué nivel de cumplimiento N_i tienen los objetivos estratégicos. Con esta modelación, se busca proponer un nuevo enfoque para los modelos planteados por (Acuña-Carvajal et al., 2019; López-Ospina et al., 2022). De esta manera, se realiza un modelo de programación lineal con optimización multicriterio, en el cual se consideran costos de proyectos, presupuesto, relaciones totales, ponderación de objetivos, influencia proyecto-objetivo y pesos entre funciones objetivo.

Parámetros

En primer lugar, se analiza la estructura de los conjuntos: O denota el conjunto de todos los objetivos estratégicos ($A \cup P \cup C \cup F$), clasificados de la siguiente manera: A son los objetivos de aprendizaje y crecimiento, P los objetivos de procesos internos, C los objetivos de clientes y F los objetivos financieros.

Estos se subdividen en objetivos causales y de efecto: los causales corresponden al conjunto ($A \cup P \cup C$), mientras que los de efecto pertenecen al conjunto ($P \cup C \cup F$). Además, se consideran $k \in K$ el conjunto de proyectos estratégicos que se van a realizar para poder llevar a cabo los objetivos i, j que corresponden a los objetivos estratégicos, los cuales pueden pertenecer a los conjuntos mencionados anteriormente. También, se tiene el conjunto proyectos, que agrupa a todos los objetivos con proyectos asociados.

En cuanto a los parámetros definidos mediante la metodología DEMATEL, se presenta $\mathbf{T}_{ij}$ como la matriz de relaciones totales, es decir, la relación entre los objetivos $i, j \in O$, $\mathbf{U}_i$ como la ponderación del objetivo $i \in O$, y, finalmente, $\mathbf{D}_{ik}$ $i \in O, k \in K$ como la matriz de influencia de k sobre i , que representa los objetivos que requieren uno o más proyectos para su realización. Este parámetro binario mide la relación entre objetivos y proyectos, es decir, qué objetivos podrían ser seleccionados si se realiza ese proyecto. Este parámetro se obtiene de una matriz DEMATEL entre objetivos y proyectos. Aquellas relaciones que están por encima de un umbral harán que su valor

del parámetro $\mathbf{D}_{ik}$ sea 1 y en otros casos, será 0.

Asimismo, se define el costo asociado a cada proyecto, donde $\mathbf{C}_k$ es el costo del proyecto $k \in K$, y se establece el presupuesto total como $\mathbf{P}$. Por último, se presentan w_1, w_2 y $w_3 \in [0, 1]$ como los pesos entre funciones objetivo.

Variables de decisión

Las variables necesarias para formular el modelo de investigación son:

- 1) Se define $X_{ij} = [0, 1] \forall i \in O, \forall j \in O$, que representa la **variable binaria de relación** (i, j) que toma el *valor 1*, si la relación entre el objetivo i y el objetivo j se incluye dentro del mapa. Siendo 0 en caso contrario.
- 2) Luego, $Y_i = [0, 1] \forall i \in O$, que representa la **variable binaria de inclusión** de objetivo i , que toma el *valor 1*, si el objetivo i es incluido dentro del mapa estratégico. 0 de lo contrario.
- 3) Posteriormente, $S_k = [0, 1] \forall k \in K$, que representa la **variable binaria de selección de proyectos** que toma el *valor 1*, si el proyecto k es incluido o seleccionado. 0 de lo contrario.
- 4) Finalmente, N_i que representa la **variable continua del nivel de cumplimiento** del objetivo $i \in O$.

Modelo matemático

El modelo de optimización de mapas tiene tres funciones objetivo:

- 1) Maximizar los objetivos financieros: $Z_1 = \sum_{i \in F} Y_i U_i$
- 2) Minimizar la cantidad de relaciones entre objetivos: $Z_2 = \sum_{i \in O} \sum_{j \in O} X_{ij}$
- 3) Maximizar los niveles de cumplimiento N_i de los objetivos: $Z_3 = \sum_{i \in O} N_i$

A continuación se presenta la función objetivo a maximizar. En esta ecuación se consideran las tres funciones objetivo normalizadas y ponderadas por sus respectivos pesos w . La primera función busca maximizar la ponderación de objetivos financieros, la segunda minimizar las relaciones entre objetivos estratégicos. Sin embargo, como menciona Miettinen (1999) para simplificar el problema, es necesario que todas las funciones objetivo se alineen en la misma dirección, es decir, todas maximizando o minimizando. Por lo tanto, en lugar de minimizar directamente, se maximiza el inverso aditivo de la

segunda función. Finalmente, la tercera función objetivo corresponde a la maximización del grado de cumplimiento de los objetivos:

$$\text{Max } Z = w_1 \bar{z}_1 - w_2 \bar{z}_2 + w_3 \bar{z}_3 \quad (\text{C.13})$$

s.a.:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \frac{z_1^+ - \sum_{i \in F} Y_i U_i}{z_1^+ - z_1^-} \\ \bar{z}_2 &= \frac{z_2^+ - \sum_{i \in O} \sum_{j \in O} X_{ij}}{z_2^+ - z_2^-} \\ \bar{z}_3 &= \frac{z_3^+ - \sum_{i \in O} N_i}{z_3^+ - z_3^-} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

En estas ecuaciones se definen las funciones objetivo normalizadas, donde z_s^+ corresponde al valor utópico máximo de z_s y z_s^- al valor utópico mínimo de z_s con $s \in [1, 2, 3]$. Podemos ver que aplicamos el método de la suma ponderada Miettinen (1999). Con la función anterior, se puede construir la frontera eficiente de soluciones respecto de los objetivos y se cumplirá para valores de w tal que: $w_1 + w_2 + w_3 = 1$.

La siguiente restricción corresponde a la definición del nivel de cumplimiento de los objetivos estratégicos $j \in O$ y garantiza que cada fuerza causal de la estrategia contribuya proporcionalmente al cumplimiento de los objetivos:

$$\frac{\sum_{i \in O} X_{ij} T_{ij}}{\sum_{i \in O} T_{ij}} = N_j \quad \forall j \in O \quad (\text{C.15})$$

Si un objetivo es CAUSA y este es seleccionado, entonces tiene que salir hacia algún objetivo:

$$Y_i \leq \sum_{j \in O} X_{ij} \quad \forall i \in \text{CAUSA} \quad (\text{C.16})$$

Si un objetivo es EFECTO y este es seleccionado, entonces tiene que existir alguna causa que llegue a él:

$$Y_j \leq \sum_{i \in O} X_{ij} \quad \forall j \in \text{EFECTO} \quad (\text{C.17})$$

El objetivo Y_i puede entrar en el mapa si existe relación con otro objetivo:

$$X_{ij} \leq Y_i \quad \forall i, j \in O \quad (\text{C.18})$$

El objetivo Y_j puede entrar en el mapa si existe relación con otro objetivo:

$$X_{ij} \leq Y_j \quad \forall i, j \in O \quad (\text{C.19})$$

Se deben cumplir la condiciones mínimas que imponen Kaplan & Norton y es que al menos debe existir una relación entre objetivos de perspectivas contiguas. Las perspectivas contiguas son: aprendizaje y crecimiento y procesos internos, proceso internos y clientes y, por último, clientes y financiera:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A} \sum_{j \in P} X_{ij} &\geq 1 \\ \sum_{i \in P} \sum_{j \in C} X_{ij} &\geq 1 \\ \sum_{i \in C} \sum_{j \in F} X_{ij} &\geq 1 \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Si i es causa de j , pues j no puede ser causa de i (los reflujos), para que no existan ciclos:

$$X_{ij} + X_{ji} \leq 1 \quad \forall i, j \in O \quad (\text{C.21})$$

La siguiente restricción corresponde a la relación del objetivo con los proyectos. Los proyectos van a tener su correlación con el correspondiente objetivo, es decir, solo se puede incluir un objetivo $i \in O$ si se incluye un proyecto $k \in K$ y si k tiene influencia sobre i :

$$Y_i \leq \sum_{k \in K} D_{ik} S_k \quad \forall i \in O \quad (\text{C.22})$$

Esta restricción indica que solo se puede incluir un proyecto $k \in K$ si se incluye un objetivo $i \in O$ y si k tiene influencia sobre i :

$$S_k \leq D_{ik} Y_i \quad \forall i \in \text{Proyectos}, \forall k \in K \quad (\text{C.23})$$

Esta restricción es sobre el cumplimiento de presupuesto, es decir, que el costo total de los proyectos incluidos no puede sobrepasar el presupuesto:

$$\sum_{k \in K} C_k W_k \leq P \quad (\text{C.24})$$

También se tiene la relación entre ponderadores w que tiene que sumar 1 y finalmente, se presenta la naturaleza de las variables del modelo de estudio:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \quad (\text{C.25})$$

$$X_{ij}, Y_i, W_k \in [0, 1] \quad (\text{C.26})$$

$$N_i \geq 0 \quad (\text{C.27})$$

Planteamiento metodológico

A continuación se explica el procedimiento para la resolución del problema de investigación formulado, en el cual se implementa el modelo de optimización multicriterio que permita escoger los objetivos estratégicos y los escenarios de planificación más efectivos a partir de los evaluados y ponderados, con el fin de identificar la solución óptima, aunque el modelo no propone una única solución. Para la función objetivo multicriterio, se incorpora el parámetro w como ponderador y para la normalización de las funciones, se consideran las variables de relación X_{ij} , la de inclusión Y_i y el nivel de cumplimiento N_i , de manera preliminar. Por consiguiente, se plantean las siguientes ecuaciones:

La función objetivo que se desea maximizar es:

$$Z = w_1 z_1 - w_2 z_2 + w_3 z_3 \quad (\text{C.28})$$

Y la función objetivo normalizada es:

$$\bar{Z} = w_1 \left[\frac{z_1^+ - \sum_{i \in F} Y_i U_i}{z_1^+ - z_1^-} \right] - w_2 \left[\frac{z_2^+ - \sum_{i \in O} \sum_{j \in O} X_{ij}}{z_2^+ - z_2^-} \right] + w_3 \left[\frac{z_3^+ - \sum_{i \in O} N_i}{z_3^+ - z_3^-} \right] \quad (\text{C.29})$$

Las funciones objetivo normalizadas $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ y $\bar{z}_3$ dependen de sus variables objetivo y sus respectivos pesos w . Esto se debe a que el modelo es multicriterio, por lo que sus funciones objetivo son optimizadas de manera simultánea.

Por su parte, la inclusión de proyectos toma en consideración la matriz D_{ik} de influencias entre proyectos k y objetivos i y se implementa teniendo en cuenta este parámetro binario D_{ik} y sujeto a las restricciones de tipo cobertura (3,32) y (3,33), que indican que para tener activo el objetivo i , debe hacerse al menos un proyecto k , relacionado con este objetivo.

Para la implementación de este modelo, en primer lugar, se hace uso del modelo multicriterio para la obtención de los valores para las funciones objetivo: maximización de ponderación de objetivos financieros, minimización de relaciones entre objetivos y maximización del nivel de cumplimiento de objetivos estratégicos, de manera que la optimización sea simultánea. Adicionalmente, se calcula el óptimo para cada iteración con su respectivo ponderador w .

Para lograr la implementación, se requiere que las funciones objetivo se establezcan a un mismo sentido, es decir, todas maximizando o minimizando, tal como menciona Miettinen (1999). Es por esto, que en la segunda función objetivo se maximiza el inverso aditivo.

A continuación, se identifican los pasos realizados para la correcta implementación del modelo:

- a. Inicialmente, se debe otorgar un valor a los parámetros requeridos para la resolución del modelo.
 - i. Se define la cantidad de objetivos estratégicos por perspectiva, es decir, cantidad objetivos aprendizaje y crecimiento, cantidad objetivos clientes, cantidad

- objetivos procesos internos y cantidad objetivos financieros.
- II. Después, se define la cantidad de proyectos relacionados con los objetivos.
 - III. Posteriormente, se definen los parámetros que provienen de la metodología DEMATEL, matriz de relaciones totales, ponderación de objetivos y matriz de relación proyecto-objetivo.
 - IV. Luego, se definen los costos de cada proyecto y el presupuesto total de la estrategia de la organización.
 - V. Finalmente, se definen los ponderadores de las funciones objetivos.
- b. Una vez determinados los parámetros requeridos, se procede a realizar la optimización para obtener las variables objetivo. La definición de las funciones objetivo debe estar dentro de una misma ecuación, de esta manera la optimización será de manera simultánea. Finalmente, la cantidad de posibles variables depende únicamente de la cantidad de combinaciones de ponderadores w existentes.
 - c. Posterior a esto, se procede al cálculo de las funciones objetivo y su normalización de manera independiente unas con otras.
 - d. Finalmente, se recalcula la función objetivo final que corresponde a la ponderación entre funciones objetivo normalizadas.

Configuración experimentales

Se describen los distintos escenarios propuestos: caso base, caso general y limitación de presupuesto (ver más detalle en apéndice D). Para esto, se varían los valores de las ponderaciones w de las funciones objetivo y de los parámetros de presupuesto. Estos escenarios permiten evaluar variadas situaciones para las empresas y además observar cómo se comporta la toma de decisiones. Entre estas, se destacan la posibilidad de que para la empresa, alguna de las funciones objetivo tenga un atractivo superior en comparación con las otras y también la limitación de presupuesto o falta de recursos.

C.3. Resultados y análisis:

El enfoque del diseño de mapas de control estratégico, proporciona un marco para entender la situación actual de la empresa y su trayectoria hacia sus objetivos. Estos mapas ofrecen una visión integral de la posición actual de la empresa y cómo se alinea con sus metas estratégicas.

Esta temática presentan un marco sólido y novedoso que se complementa con un análisis de sensibilidad ante la variación de ciertos parámetros del modelo de optimización multicriterio propuesto y el establecimiento de distintos escenarios de estudio que permitieron evaluar diferentes situaciones que soportan la toma de decisiones en las empresas.

Con la aplicación del método DEMATEL difuso y teniendo en cuenta los objetivos definidos, se centraron los resultados de éste a través de la matriz de relaciones totales T_{ij} y el análisis de causalidad presentados a continuación:

x\y	A1	A2	A3	P1	P2	P3	C1	C2	C3	F1	F2
A1	0,01	0,08	0,07	0,12	0,12	0,11	0,14	0,09	0,14	0,07	0,07
A2	0,08	0,01	0,02	0,05	0,09	0,09	0,14	0,13	0,15	0,07	0,08
A3	0,04	0,05	0	0,04	0,07	0,05	0,12	0,11	0,1	0,07	0,07
P1	0	0	0	0	0,05	0,04	0,06	0,05	0,06	0,12	0,04
P2	0	0	0	0,04	0,01	0,08	0,11	0,09	0,1	0,1	0,09
P3	0	0	0	0,05	0,08	0,01	0,09	0,09	0,07	0,1	0,06
C1	0	0	0	0	0	0	0,01	0,05	0,05	0,04	0,12
C2	0	0	0	0	0	0	0,05	0,01	0,04	0,04	0,12
C3	0	0	0	0	0	0	0,08	0,08	0,01	0,02	0,11
F1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,03
F2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,04	0

Objetivo	Valor D (Nivel de influencia)	Valor R (Nivel de relación)	(D+R) (Nivel de importancia)	(D-R)	Tipo de Objetivo
A1	101	12	113	89	causa
A2	90	12	103	78	Causa
A3	72	9	82	63	Causa
P1	60	41	101	20	Causa
P2	55	38	93	17	Causa
P3	42	31	73	11	Causa
C1	29	70	99	-42	Efecto
C2	25	70	95	-45	Efecto
C3	26	78	104	-52	Efecto
F1	3	67	70	-64	Efecto
F2	4	78	82	-74	Efecto

Figura C.1: Matriz de Relaciones Totales.

Figura C.2: Análisis de Causalidad.

En la figura C.1 se puede observar la degradación del color de la matriz, la cual refleja las relaciones con más fuerza dentro del conjunto de perspectivas que componen la estrategia de la empresa. De esta manera, las relaciones más importantes son aquellas que tienen su origen en la perspectiva de aprendizaje y crecimiento, y finalizan en la perspectiva financiera. Ciertamente, este es un indicador de la importancia que tiene aprender de lo que ha hecho la empresa y corregirlo para así poder alcanzar sus metas financieras.

Según lo esperado, los objetivos de aprendizaje y crecimiento, al igual que los de procesos internos, se clasifican como de tipo causales, y los objetivos que están orientados al cliente y la satisfacción financiera propia de la empresa, como efecto, tal como se muestra en la figuraC.2.

También se considera la calificación de cada objetivo estratégico realizada por los expertos, la cual es calculada teniendo en cuenta tres criterios: factibilidad, inteligibilidad y utilidad. Para luego calcular la ponderación o calificación final U_i de cada objetivo estratégico, que representa la relevancia de este con respecto a la calificación de los expertos. Este resultado es un insumo para el desarrollo del modelo de optimización que permite la eliminación de los objetivos menos relevantes para la estrategia de la organización. Con la matriz de relaciones totales ya establecida, se generó un primer modelo estructural del mapa estratégico de la organización, y este parámetro sería el input para el modelo de optimización multicriterio, en el cual se consideran costos de proyectos, presupuesto, relaciones totales, ponderación de objetivos, influencia proyecto-objetivo y peso entre funciones objetivo.

Para la función objetivo multicriterio, se toma en consideración el parámetro w como ponderador y para la normalización de las funciones se toman en consideración las variables de relación (i, j) X_{ij} , inclusión de objetivos Y_i y nivel de cumplimiento N_i , preliminarmente.

C.3.1. Modelo Multicriterio

En primer lugar, se hace uso del modelo multicriterio para la obtención de los valores para las funciones objetivo. Este modelo tiene en cuenta las siguientes funciones:

- **Maximización de la ponderación de objetivos financieros:** Se busca optimizar los valores relacionados con los objetivos financieros, maximizando su ponderación en el modelo.
- **Minimización de relaciones entre objetivos:** Se minimizan las relaciones o conflictos entre diferentes objetivos para obtener una solución que equilibre estos objetivos.
- **Maximización del nivel de cumplimiento de objetivos estratégicos:** Se maximiza el cumplimiento de los objetivos estratégicos definidos, asegurando que se alcancen los objetivos clave de la estrategia.

Estas funciones objetivo se optimizan simultáneamente para encontrar un equilibrio adecuado entre los diferentes criterios.

C.3.2. Cálculo del Óptimo para Cada Iteración

Adicionalmente, se calcula el óptimo para cada iteración del modelo. Para cada iteración, se ajusta el ponderador w , que define la importancia relativa de cada función objetivo en el proceso de optimización. El cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$\text{Óptimo}_i = \arg \max \{w_1 \cdot f_1 + w_2 \cdot f_2 + \dots + w_n \cdot f_n\} \quad (\text{C.30})$$

donde f_i representa las funciones objetivo y w_i es el ponderador correspondiente para cada función en la iteración i . Este proceso asegura que los resultados obtenidos sean los mejores posibles dados los ponderadores aplicados.

Para la función objetivo multicriterio, se toma en consideración el parámetro w como ponderador y para la normalización de las funciones se toma en consideración las variables de relación $(i, j) X_{ij}$, inclusión de objetivos Y_i y nivel de cumplimiento N_i , preliminarmente. Asimismo, se presentan los valores que toman las tres funciones objetivo z_1 , z_2 y z_3 , así como la función objetivo ponderada Z , junto con los valores normalizados y sus respectivos parámetros w .

A continuación, se explica el modelo implementado en el lenguaje PythonTM para los distintos escenarios planteados: caso base, caso general y presupuesto limitado que permitieron evaluar distintas situaciones en esta unidad de negocio.

■ Para el escenario base:

Es necesario validar el modelo planteado y comprobar que se mantiene la estructura clásica de un BSC para luego analizar los resultados obtenidos, en el que las funciones objetivo tienen los mismos pesos y los proyectos tienen los mismos costos. Se observa que las relaciones incluidas en el mapa son $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 3)$. De esta manera, se corrobora con la variable Y_i que los objetivos 0, 1, 2 y 3 están incluidos en el mapa, tal como se esperaba para este caso, ya que se presenta un objetivo por perspectiva como se muestra en la figura D.1. Además, se muestra el nivel de cumplimiento de los objetivos, el cual se deriva de la ponderación de la variable de inclusión de relación X_{ij} y la matriz de relaciones totales T_{ij} , como se muestra en el cuadro C.4.

También se presenta el mapa generado y otra tabla con los proyectos que se realizan, los cuales corresponden a los proyectos 0, 1 y 2; es decir, todos los proyectos

están incluidos y el presupuesto es utilizado en su totalidad como se muestra en el cuadro C.5. Además, se muestran los valores de las funciones objetivo z_1 , z_2 y z_3 junto con el valor de la función Z , que corresponde a la ponderación entre los respectivos w y z , como se muestra en el cuadro C.6. Dado que los ponderadores para este escenario tienen el mismo valor, las funciones z tienen la misma influencia sobre Z .

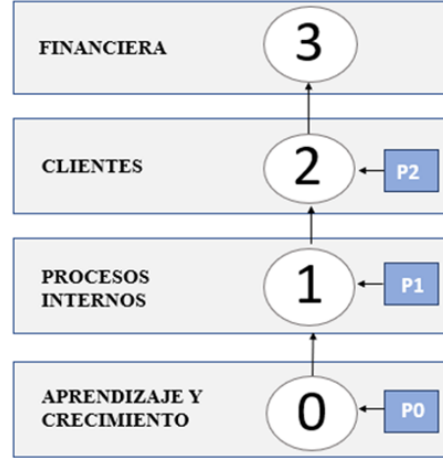


Figura C.3: Mapa Estratégico - Caso Base.

Variables Caso Base	j			
	0	1	2	3
X_{ij}				
$i = 0$	0	1.0	0	0
$i = 1$	0	0	1.0	0
$i = 2$	0	0	0	1.0
$i = 3$	0	0	0	0
N_j	0	0.4347	0.5769	0
i	0	1	2	3
Y_i	1.0	1.0	1.0	1.0

Cuadro C.4: Variables del Caso Base

Variable	K_0	K_1	K_2
S_k	1.0	1.0	1.0

Cuadro C.5: Proyectos - Caso Base

Funciones Objetivo	z_1	z_2	z_3	Z
Valores	1.0	3.0	1.0007	-0.3294

Cuadro C.6: Valores de Funciones Objetivo - Caso Base

■ **Para el escenario general:**

Se muestran los resultados obtenidos cuando existe variación del valor de los pesos. En este caso, se analizan algunos mapas estratégicos para los distintos valores de ponderadores y las funciones objetivo para todos los valores de w planteados y tabulados en el cuadro D.8 del apéndice D.

En las siguientes gráficas se presentan los mapas estratégicos obtenidos para algunos valores de ponderadores escogidos, tales como: $w_1 = 0,1$, $w_1 = 0,25$, $w_1 = 0,4$ y $w_1 = 1$. Se puede inferir que la estrategia varía cuando cambian los valores de los ponderadores y se muestran las relaciones incluidas en el mapa junto con los objetivos seleccionados, así como los proyectos realizados.

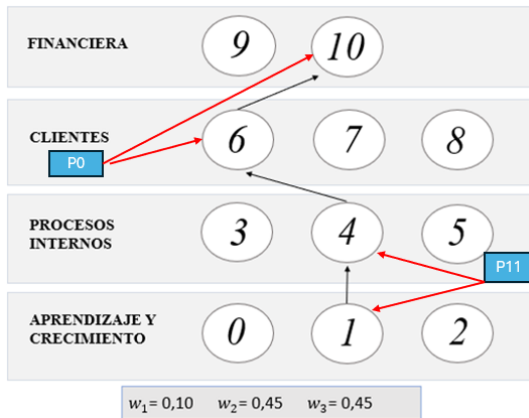


Figura C.4: Mapa Estratégico 1.

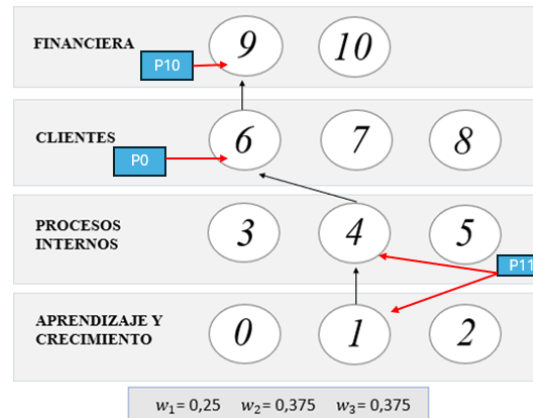


Figura C.5: Mapa Estratégico 2.

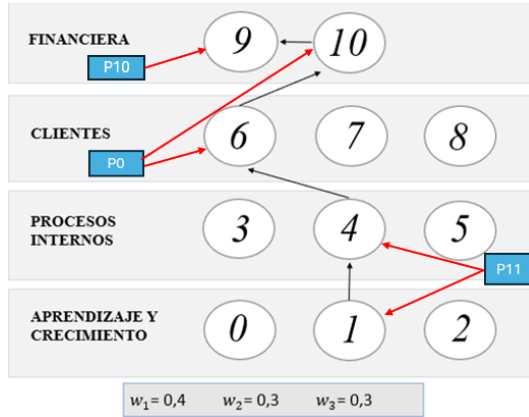


Figura C.6: Mapa Estratégico 3.

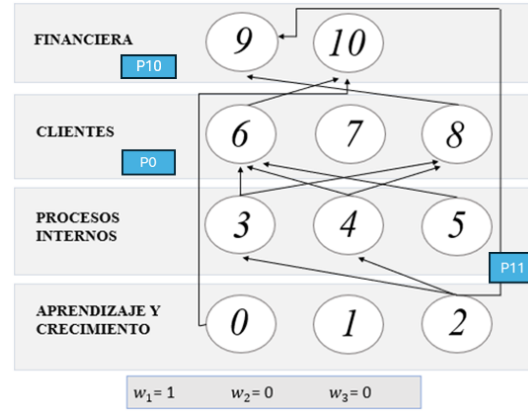


Figura C.7: Mapa Estratégico 4.

En la figura C.7, se observa un caso de preferencia única a una función objetivo, dado que el ponderador de la primera función toma el valor de uno. En este caso, la estrategia cambia de manera radical en comparación con los otros casos presentados, en los que se incluyen muchas relaciones y objetivos, lo que hace que la interpretación de la estrategia sea totalmente distinta para la organización.

Iteración	Z_1	Z_2	Z_3	Z
1	0.9018	3.0	0.9619	-1.0191
2	0.9018	3.0	0.9619	-1.8460
3	0.9018	3.0	0.9619	-1.6540
4	1.3241	3.0	0.8285	-1.4485
5	1.3241	3.0	0.8285	-1.2076
6	1.3241	3.0	0.8285	-0.9666
7	2.2259	4.0	1.1369	-0.6686
8	2.2259	4.0	1.1369	-0.3029
9	2.2259	4.0	1.1369	0.0629
10	2.2259	4.0	1.1369	0.4286
11	2.2259	4.0	1.1369	0.7944
12	2.2259	4.0	1.1369	1.1601
13	2.2259	4.0	1.1369	1.5259
14	2.2259	4.0	1.1369	1.8916
15	2.2259	4.0	1.1369	2.2573
16	2.2259	4.0	1.1369	2.6231
17	2.2259	4.0	1.1369	2.9888
18	2.2259	4.0	1.1369	3.3546
19	2.2259	4.0	1.1369	3.7203
20	2.2259	4.0	1.1369	4.0861
21	2.2259	14.0	2.0558	4.4518

Cuadro C.7: Resultados f.o Caso General

Iteración	Z_1	Z_2	Z_3	$\bar{Z}$
1	1.0000	1.0000	0.8913	-0.0543
2	1.0000	1.0000	0.8913	-0.0016
3	1.0000	1.0000	0.8913	0.0511
4	0.6811	1.0000	1.0000	0.1022
5	0.6811	1.0000	1.0000	0.1362
6	0.6811	1.0000	1.0000	0.1703
7	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0561
8	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0521
9	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0481
10	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0441
11	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0401
12	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0361
13	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0321
14	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0281
15	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0241
16	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0201
17	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0160
18	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0120
19	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0080
20	0.0000	0.9091	0.7487	-0.0040
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Cuadro C.8: Resultados f.o normalizadas

En el cuadro C.7 y C.8 se analizan los resultados obtenidos de las funciones obje-

tivo, tanto para los valores en su naturaleza, como para los valores normalizados. Se indican los valores de las funciones z_1 , z_2 , z_3 y Z . Se puede afirmar que, a medida que el valor de w_1 va aumentando, el valor de Z también lo hace. Asimismo, los valores de las funciones z_1 , z_2 y z_3 van aumentando con el crecimiento de w_1 , o dicho de otra forma, se puede analizar como la disminución de w_2 y w_3 . Con la normalización, ya no es estrictamente creciente la función y se observan distintas tomas de decisiones.

En las siguientes gráficas se observan los valores de las funciones Z_1 , Z_2 y Z_3 en función del parámetro w_1 , revelando que la estrategia adoptada no experimenta variaciones significativas a lo largo de todo el rango de ponderadores, ya que las preferencias no son extremas. Sin embargo, se observa que los valores de las funciones varían en determinados intervalos.

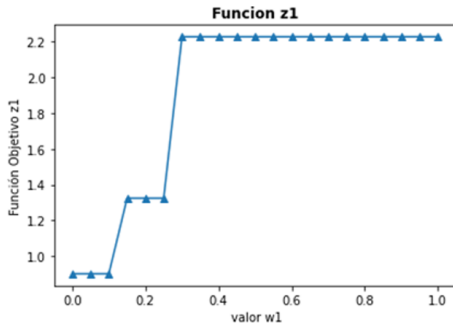


Figura C.8: Función objetivo Z_1 .

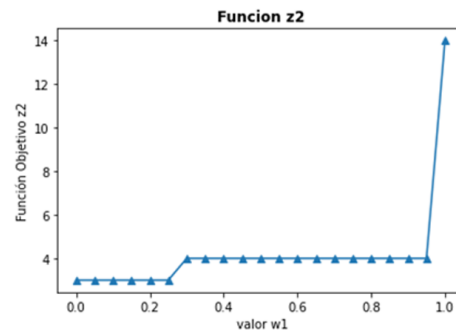


Figura C.9: Función objetivo Z_2 .

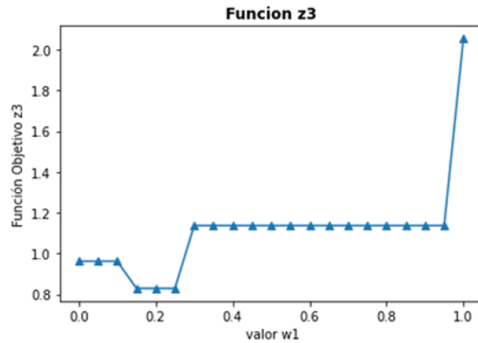


Figura C.10: Función objetivo Z_3 .

Prosiguiendo con el estudio detallado de las funciones objetivo, las figuras C.11 y C.12 ilustran la relevancia relativa de los parámetros w_2 y w_3 . Se observa una

tendencia decreciente en ambas métricas, lo que sugiere que presentan una pendiente negativa, derivada de su dependencia exclusiva respecto al valor de w_1 . En consecuencia, dado que un incremento en w_1 conlleva un aumento en la función objetivo Z , cualquier aumento en w_2 o w_3 provoca una disminución en Z , lo que confirma la relación inversa entre estos parámetros y la optimización de Z .

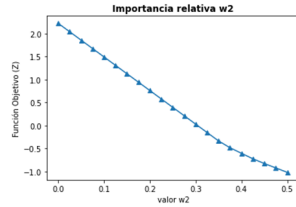


Figura C.11: Importancia relativa w_2 .

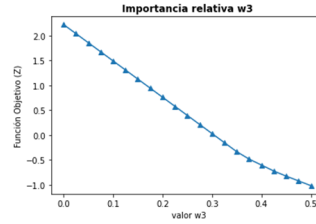


Figura C.12: Importancia relativa w_3 .

Con las modificaciones realizadas, los valores ahora exhiben una variabilidad que desestima un patrón uniforme de incremento en función del aumento del ponderador w_1 . Con la aplicación de la normalización, la función objetivo final deja de mostrar un comportamiento estrictamente creciente.

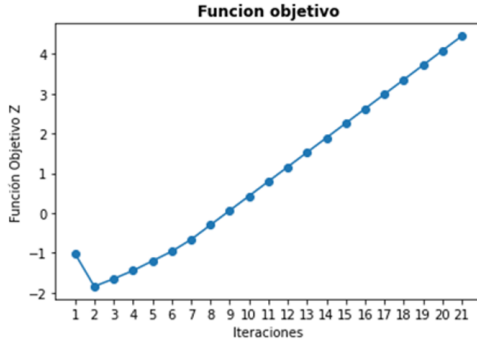


Figura C.13: Función objetivo Z .

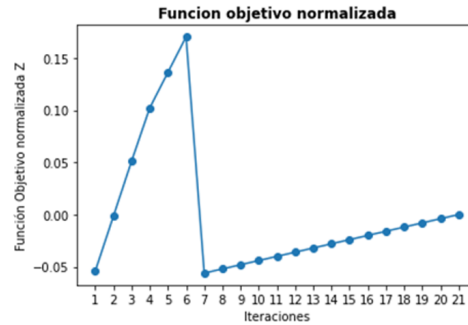


Figura C.14: Función objetivo $\bar{Z}$.

En la siguiente figura se exponen los valores normalizados de las funciones z_1 , z_2 y z_3 , en correspondencia con las gráficas C.8, C.9 y C.10 (las funciones objetivo z - Escenario general). Esto evidencia que, aunque las funciones no muestran variaciones significativas con cada valor, los resultados reflejan diferentes decisiones en función de los datos presentados.

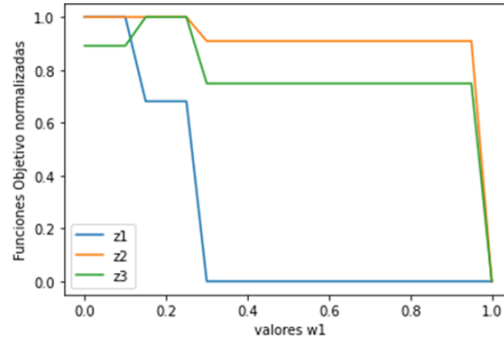


Figura C.15: Funciones objetivo Z_i normalizadas.

■ Para el escenario limitación presupuestaria:

Se muestran las gráficas de cómo varía la inclusión de proyectos cuando disminuye el presupuesto. Para $p = 50$, $p = 40$, $p = 30$, $p = 20$ y $p = 10$ se utilizan los valores de ponderadores: $w_1 = 0,4$, $w_2 = 0,3$ y $w_3 = 0,3$.

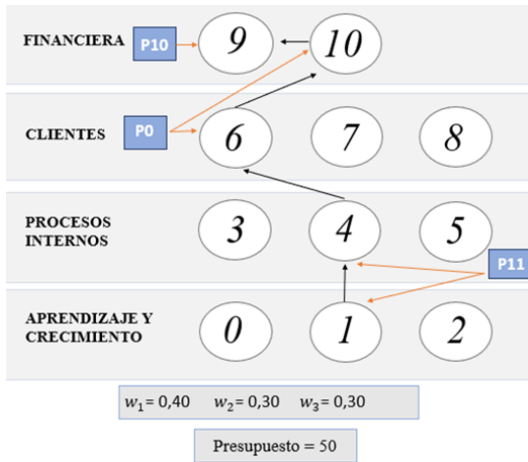


Figura C.16: Mapa Estratégico $p=50$.

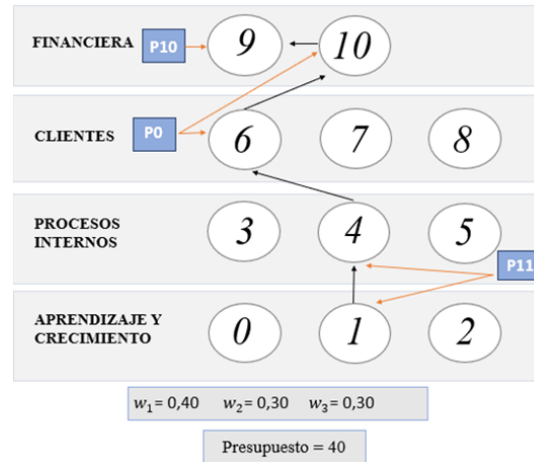


Figura C.17: Mapa Estratégico $p=40$.

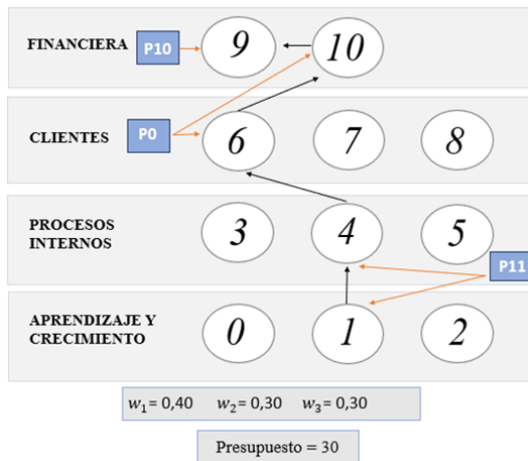


Figura C.18: Mapa Estratégico p=30.

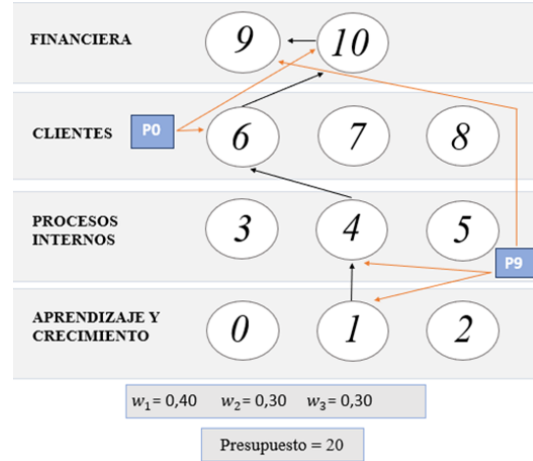


Figura C.19: Mapa Estratégico p=20.

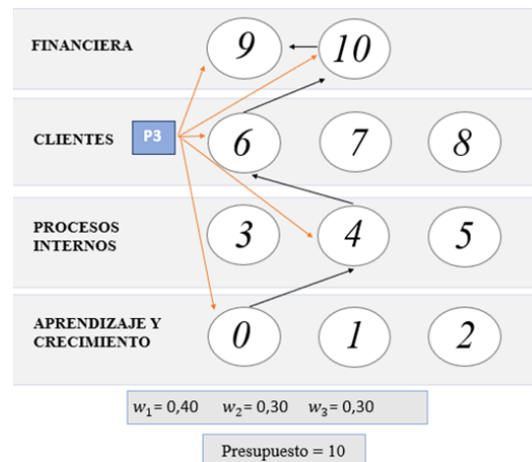


Figura C.20: Mapa Estratégico p=10.

En algunos casos, cuando cambia el presupuesto, la estrategia puede variar o no. La inclusión de objetivos cambia únicamente cuando el presupuesto se disminuye de 20 a 10, reemplazando el objetivo 1 por el objetivo 0.

La inclusión de proyectos cambia radicalmente cuando disminuye el presupuesto. El modelo no descarta proyectos sino que plantea unos nuevos.

En las figuras C.16, C.17 y C.18, se ejecutan los proyectos 0, 10 y 11, los cuales contribuyen al logro de los objetivos 1, 4, 6, 9 y 10. En contraste, para el escenario de la figura C.19, se llevan a cabo los proyectos 0 y 9, que también contribuyen a la consecución de los mismos objetivos.

Similarmente, en la figura C.20, se implementa el proyecto 3, que apoya el logro de los objetivos 0, 4, 6, 9 y 10. Sin embargo, a diferencia de las otras figuras, esta variante incorpora el objetivo 0 y excluye el objetivo 1, resultando en la inclusión de la relación (0, 4) y la eliminación de la relación (1, 4).

En la implementación del modelo, todos los objetivos están respaldados por al menos un proyecto, tal como se muestra en el cuadro C.9. Así, el presupuesto de $p = 0$ resultó inviable, dado que en ese escenario la integridad estructural y lógica del Balanced Scorecard no se preservó.

N° iteración	P=30	P=20	P=10
1 ($w_1 = 0,2$)	0-10-11	2-9	3
2 ($w_1 = 0,3$)	0-10-11	2-9	3
3 ($w_1 = 0,4$)	0-10-11	2-9	3
4 ($w_1 = 0,5$)	0-10-11	2-9	3
5 ($w_1 = 0,6$)	0-10-11	2-9	3
6 ($w_1 = 0,7$)	0-10-11	2-9	3
7 ($w_1 = 0,8$)	0-10-11	2-9	3

Cuadro C.9: Resultados variable S_k

En el cuadro C.9, se detallan los proyectos incluidos en el mapa estratégico a lo largo de siete iteraciones, con variaciones presupuestarias en tres niveles distintos. Al reducir el presupuesto, el modelo ajusta la estrategia introduciendo nuevas alternativas en lugar de eliminar proyectos. Esta flexibilidad se debe a la heterogeneidad de proyectos asociados a cada objetivo. En consecuencia, si un proyecto es excluido debido a restricciones presupuestarias, el objetivo puede ser reincorporado al mapa estratégico mediante la inclusión de proyectos alternativos.

En el cuadro C.10, se muestran los objetivos incluidos en el mapa estratégico a lo largo de siete iteraciones con variaciones presupuestarias. La variable presenta una baja sensibilidad al presupuesto, ya que las estrategias para $p = 30$ y $p = 20$ son equivalentes en términos de objetivos, aunque los proyectos varían.

Para $p = 10$, el modelo excluye el objetivo 1 y la relación (1, 4), integrando en su lugar el objetivo 0 y la relación (0, 4), debido a que el presupuesto solo permite la inclusión de un proyecto dada la estructura de costos.

N° iteración	P=30	P=20	P=10
1 ($w_1 = 0,2$)	1-4-6-9	1-4-6-9	0-4-6-9
2 ($w_1 = 0,3$)	1-4-6-9-10	1-4-6-9-10	0-4-6-9-10
3 ($w_1 = 0,4$)	1-4-6-9-10	1-4-6-9-10	0-4-6-9-10
4 ($w_1 = 0,5$)	1-4-6-9-10	1-4-6-9-10	0-4-6-9-10
5 ($w_1 = 0,6$)	1-4-6-9-10	1-4-6-9-10	0-4-6-9-10
6 ($w_1 = 0,7$)	1-4-6-9-10	1-4-6-9-10	0-4-6-9-10
7 ($w_1 = 0,8$)	1-4-6-9-10	1-4-6-9-10	0-4-6-9-10

Cuadro C.10: Resultados Variable Y_i

Apéndice D

Configuraciones Experimentales

D.1. Aplicación metodología *DEMATEL*

Este apéndice detalla los objetivos estratégicos definidos en una unidad de negocio de una empresa del rubro de las telecomunicaciones, indicando a qué perspectiva pertenecen, según Kaplan & Norton (2004). En el cuadro D.1, se presentan los objetivos estratégicos integrados en la metodología (Wu & Lee, 2007; Wu et al., 2011; Wu, 2012; Valmohammadi & Sofiyabadi, 2015).

Perspectivas	N°	Objetivo
Aprendizaje y Crecimiento	A1	Fortalecer Tecnología, equipamiento y TI
	A2	Fortalecer competencias de RR.HH
	A3	Mejorar el clima laboral
Procesos Internos	P1	Gestionar eficientemente los procesos de la unidad
	P2	Mejorar los indicadores de continuidad operacional
	P3	Fortalecer los procesos de mantención
Cliente	C1	Mejorar la satisfacción en todos los servicios
	C2	Aumentar la fidelización de clientes
	C3	Aumentar la participación de mercado
Financiera	F1	Disminuir Costos
	F2	Aumentar Ingresos

Cuadro D.1: Lista de Objetivos Estratégicos

Matriz de Calificación DEMATEL

Para implementar DEMATEL, se utilizó una hoja de *Excel*TM. Un enfoque para completar la matriz de influencia directa en el que el análisis DEMATEL consistió en solicitar a cada participante que realizara la evaluación de forma individual. En este caso, Mondadori & de Melo Bezerra (2018), sugieren que cada participante exprese sus preferencias de manera autónoma.

Como se ha señalado, el método DEMATEL tiene como objetivo la adquisición de conocimiento para delinear relaciones de causalidad entre los objetivos estratégicos de la empresa. Para desarrollar un modelo estructural preliminar del mapa estratégico, es habitual convocar a un panel de expertos que realicen evaluaciones que permitan definir las interrelaciones entre los objetivos. Este proceso, por ende, constituye una toma de decisiones grupal.

¿Cómo completar la Matriz? Para calificar cada una de las casillas disponibles realice la siguiente afirmación: **“El objetivo X tiene un nivel de influencia/efecto ___ en la consecución del objetivo Y.”**

Grado de relación	Convención
Nulo	N
Bajo	B
Medio Bajo	MB
Medio Alto	MA
Alto	A

Cuadro D.2: Grado de relación y su convención

Nota: Por favor elija alguna de estas opciones en el menú desplegable en cada una de las casillas (exceptuando las grises).

Ejemplo: Aumentar la fidelización de clientes (C2) tiene un nivel de influencia ALTO en Aumentar los ingresos de la Empresa (F2).

Matriz de Calificación diligenciada por: ___

x/y	A1	A2	A3	P1	P2	P3	C1	C2	C3	F1	F2
A1		A	MA	A	MA	MA	MA	MB	MA	B	B
A2	A		N	MA	MA	A	A	MA	A	B	B
A3	N	B		B	B	B	MA	MA	MA	MB	B
P1					MA	MB	MA	MA	MA	A	B
P2				MB		MA	MA	A	MB	MA	B
P3				MB	A		MA	A	MA	MA	B
C1								A	MA	MB	A
C2							MB		A	MB	A
C3							MA	MA		MB	MA
F1											B
F2										MB	

Cuadro D.3: Matriz de Calificación DEMATEL

D.2. Escenarios

A continuación, se establecen tres escenarios de análisis para evaluar el desempeño del modelo de optimización desarrollado, contextualizados mediante la variación de los parámetros asociados a este.

En cada caso propuesto, se mencionan los valores de los parámetros necesarios para el desarrollo del modelo y los parámetros que pueden influir en los resultados de las variables de decisión y el cálculo de la función objetivo multicriterio. De esta manera, se realiza una interpretación y análisis en cada escenario planteado.

D.2.1. Caso base

En el presente contexto, el objetivo es evaluar el desempeño del modelo propuesto bajo condiciones de parámetros fijos y con un número reducido de objetivos y proyectos. Este modelo es de carácter multicriterio, en el que se asignan pesos de igual valor a las funciones objetivo, así como los costos asociados a los proyectos.

En el cuadro D.4, se detallan los valores de los parámetros de este caso: el modelo incluye un número limitado de objetivos y proyectos, incorporando un objetivo por cada perspectiva para preservar la estructura del BSC como se muestra en la figura D.1.

De igual forma, los ponderadores asignados a las funciones objetivo son iguales, es decir, se modela que las tres funciones tienen igual importancia sobre el resultado final. Con

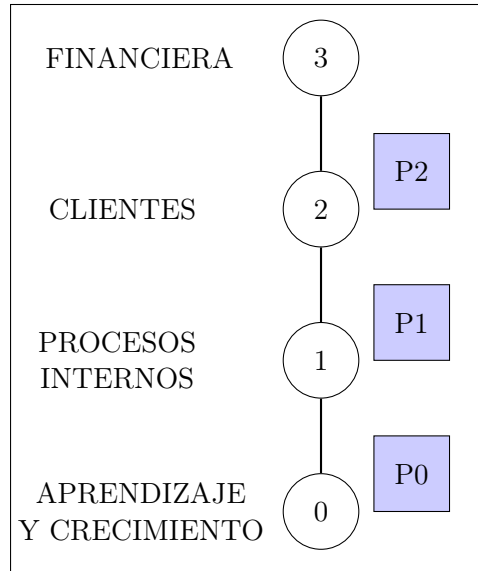


Figura D.1: Mapa estratégico - Caso Base

respecto a los parámetros relacionados con la cantidad de proyectos, el presupuesto total y los costos de los proyectos, se observa la realización de todos los proyectos sí puede ser parte de la solución, dado que el presupuesto disponible alcanza para que todos se puedan ejecutar satisfactoriamente.

Descripción	Valor
Cantidad de objetivos	
Financieros	$F = 1$
Clientes	$C = 1$
Procesos internos	$P = 1$
Aprendizaje y crecimiento	$A = 1$
Cantidad de proyectos	$K = 3$
Ponderador funciones objetivo	$W_1 = W_2 = W_3 = \frac{1}{3}$
Presupuesto total	$P = 3$
Costo proyectos	$C = 1$

Cuadro D.4: Parámetros Caso base

En el cuadro D.5, se presentan valores simplificados de estos parámetros DEMATEL para facilitar la interpretación de los resultados.

En este contexto, se interpretan los siguientes parámetros: la matriz de relaciones totales (T_{ij}) , de dimensión 4x4, donde i y j corresponden a los objetivos estratégicos (A,

C, P, F). La ponderación de objetivos (U_i), una matriz 1x4, con las columnas representando los objetivos estratégicos y reflejando la relevancia diferenciada de cada objetivo. Finalmente, la matriz de influencia proyectos-objetivos (D_{ik}), de dimensión 4x3, con las filas representando la cantidad de objetivos estratégicos y las columnas la cantidad de proyectos. Esta matriz permite identificar qué objetivos requieren de proyectos específicos para su cumplimiento.

Parámetro	Descripción
Matriz de relaciones totales	$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1,2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2,6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1,2 & 0 \end{bmatrix}$
Ponderación objetivos	$U_i = [0,2 \quad 0,3 \quad 0,5 \quad 1]$
Matriz influencia proyectos-objetivos	$D_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cuadro D.5: Parámetros Metodología DEMATEL - Caso Base

D.2.2. Caso general

En este escenario se analiza el comportamiento de las funciones objetivo bajo la condición de que ciertas funciones tienen mayor importancia relativa que otras, es decir, se examina la variación de los ponderadores w . De esta forma, se presentan los parámetros utilizados, así como los objetivos estratégicos incorporados en el modelo, y se detallan las perspectivas y la descripción de cada uno de ellos, con la finalidad de destacar el contexto real en el cual se desenvuelve el problema de investigación. Aquí, la variación se centra en los valores de w_1 , dado que los ponderadores están restringidos por su sumatoria ($\sum_{i=1}^3 w_i = 1$). Además, se analiza el impacto en los ponderadores w_2 y w_3 cuando estos se igualan.

En el cuadro D.6, se presentan los valores de los parámetros del caso general con los objetivos por cada perspectiva y la ejecución de todos proyectos con un mismo costo. En el cuadro D.7, se presentan los valores de los parámetros extraídos de la metodología DEMATEL. Esta tabla incluye la matriz de relaciones totales, con una dimensión de

Descripción	Valor
Cantidad de objetivos:	
Financieros	$F = 2$
Clientes	$C = 3$
Procesos internos	$P = 3$
Aprendizaje y crecimiento	$A = 3$
Cantidad de proyectos:	$K = 14$
Ponderador funciones objetivo:	$W_1 = Variable, W_2 = W_3 = Constante$
Presupuesto total:	$P = 100$
Costo proyectos:	$C = 10$

Cuadro D.6: Parámetros Caso general

11x11, derivada del número de objetivos estratégicos (A, C, P, F), así como la ponderación de objetivos, representada en una matriz de 1x11. Finalmente, la matriz de influencia de proyectos, con dimensión 11x14, donde las columnas representan los proyectos y las filas los objetivos.

Parámetro	Descripción
Matriz de relaciones totales	$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0,003 & 0,0446 & 0,0475 & 0,0055 & 0,0997 & 0,1011 & 0,0778 & 0,091 & 0,0655 & 0,0246 & 0,0221 \\ 0,0669 & 0,003 & 0,0698 & 0,0261 & 0,102 & 0,0853 & 0,0166 & 0,0686 & 0,065 & 0,0198 & 0,0146 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0041 & 0,0485 & 0,0913 & 0,0488 & 0,0817 & 0,0544 & 0,0189 & 0,0167 \\ 0 & 0 & 0 & 0,003 & 0,003 & 0,067 & 0,0003 & 0,0121 & 0,0909 & 0,054 & 0,0084 \\ 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0,002 & 0,0447 & 0,0891 & 0,0366 & 0,0962 & 0,06 & 0,0412 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0447 & 0,0447 & 0,005 & 0,004 & 0,0925 & 0,0305 & 0,0995 & 0,0138 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0489 & 0,0667 & 0,0569 & 0,0989 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0524 & 0,0901 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0317 & 0,0733 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0667 & 0 & 0,002 & 0,0223 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0891 & 0,002 \end{bmatrix}$
Ponderación objetivos	$U_i = \begin{bmatrix} 0,9763 & 1,1108 & 0,9978 & 0,7856 & 1,1089 & 1,3556 \\ 0,8802 & 1,2094 & 1,4202 & 1,3241 & 0,9018 & \end{bmatrix}$
Matriz influencia proyectos-objetivos	$D_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cuadro D.7: Parámetros Metodología DEMATEL - Caso General

El cuadro D.8 muestra las iteraciones realizadas junto con las diversas combinaciones de valores para los ponderadores. Como sabemos que los pesos deben sumar un total de 1, y las combinaciones evaluadas varían únicamente el valor de w_1 , mientras que w_2

y w_3 tienen el mismo valor (*Ceteris paribus* se aplicó en el que se hace variar un factor con los demás factores constantes).

Iteración	W1	W2	W3
1	0.00	0.50	0.50
2	0.05	0.48	0.48
3	0.10	0.45	0.45
4	0.15	0.43	0.43
5	0.20	0.40	0.40
6	0.25	0.38	0.38
7	0.30	0.35	0.35
8	0.35	0.33	0.33
9	0.40	0.30	0.30
10	0.45	0.28	0.28
11	0.50	0.25	0.25
12	0.55	0.23	0.23
13	0.60	0.20	0.20
14	0.65	0.18	0.18
15	0.70	0.15	0.15
16	0.75	0.13	0.13
17	0.80	0.10	0.10
18	0.85	0.08	0.08
19	0.90	0.05	0.05
20	0.95	0.03	0.03
21	1.00	0.00	0.00

Cuadro D.8: Variación de Ponderadores – Caso General

En este caso, se espera representar cómo los ponderadores influyen en las tres funciones objetivo, en la función objetivo final y en la presentación de sus mapas estratégicos, realizando una comparación entre los valores de los ponderadores y función objetivo.

D.2.3. Limitación presupuestaria

Se pretende evaluar el comportamiento del modelo propuesto bajo la restricción de un presupuesto limitado ($P = \{50, 40, 30, 20, 10, 0\}$). Para ello, se emplean los mismos parámetros que se utilizaron en el escenario general.

El objetivo de este análisis es identificar los proyectos que el modelo prioriza conforme se reduce el presupuesto, así como examinar las modificaciones de la estrategia organizacional frente a este hecho. Además, los resultados se ilustran mediante los mapas estratégicos generados.