

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS



PINNs PARA EL PROBLEMA INVERSO DE LA
RECUPERACIÓN DE FUENTE DE CALOR EN HORMIGÓN

JUAN PEDRO LIRA RUIZ CLAVIJO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

PROFESOR GUÍA: JORGE GÓMEZ MIR
PROFESOR CO-GUÍA: JOSÉ ANTONIO ABELL

SANTIAGO, JULIO DE 2026

A mi madre y mi padre, que me dieron la vida.

A mis amigos, con quienes comparto la vida.

A los libros, que me entusiasman la vida.

A la música, que me salvó la vida.

Y, a mí.

Resumen

El calor liberado durante la **hidratación del cemento**, $Q(t)$, gobierna el agrietamiento térmico a edades tempranas en **hormigón masivo**, y su determinación a partir de mediciones de temperatura constituye un **problema inverso**. Los enfoques anteriores anidan una simulación de elementos finitos dentro de un optimizador que ajusta una familia funcional predefinida para la tasa de generación de calor $\dot{Q}(t)$, lo que impone una forma a priori sobre la fuente, depende de una malla y arrastra el costo de una simulación por iteración. Esta tesis desarrolla y evalúa una **red neuronal informada por la física** (PINN) que identifica $\dot{Q}(t)$ a partir de condiciones semi-adiabáticas modeladas mediante bajo la **condición de borde convectiva (Robin)** realista, a partir de mediciones de temperatura escasas y sin imponer forma funcional alguna, mediante una configuración de doble red con embedding de características de Fourier y entrenamiento causal. La metodología se validó de forma incremental y luego se caracterizó sobre una campaña que barre la morfología de la fuente, la cobertura de sensores, el ruido de medición y el perfil de temperatura ambiente. La condición semi-adiabática se modeló usando condiciones de borde tipo Robin que relacionan el gradiente térmico con la temperatura exterior en la frontera del dominio simulado y se impuso de forma estable, para las fuentes bien identificables, desde gaussianas hasta un pulso rectangular discontinuo que una familia paramétrica fija no podría siquiera representar, la energía total liberada, magnitud que gobierna el agrietamiento térmico, se recuperó con un error inferior al 5 % en toda la grilla de condiciones de medición, mientras que el residual de la ecuación rechazó del orden del 80 % del ruido. La limitación central es la curva de hidratación real: su escala temporal extensa la vuelve **débilmente identificable**, régimen en el que reducir la capacidad de la red opera como una regularización implícita y la calidad de la fuente se desacopla del error del campo, la única cantidad medible. El trabajo establece a las PINNs como una herramienta viable y complementaria, sin malla y sin forma funcional impuesta para este problema inverso, con un dominio de robustez caracterizado.

Palabras clave: redes neuronales informadas por la física; problema inverso; calor de hidratación; condición de borde de Robin; hormigón masivo; identificación de términos fuente; identificabilidad.

Abstract

The heat released during **cement hydration**, $Q(t)$, governs early-age thermal cracking in **mass concrete**, and its determination from temperature measurements constitutes an **inverse problem**. Previous approaches nest a finite element simulation inside an optimizer that fits a predefined functional family for the heat generation rate $\dot{Q}(t)$, which imposes an a priori shape on the source, depends on a mesh, and carries the cost of one simulation per iteration. This thesis develops and evaluates a **physics-informed neural network** (PINN) that identifies $\dot{Q}(t)$ from semi-adiabatic conditions modeled under the realistic **convective (Robin) boundary condition**, using sparse temperature measurements and without imposing any functional shape, through a dual-network configuration with Fourier feature embedding and causal training. The methodology was validated incrementally and then characterized over a campaign sweeping source morphology, sensor coverage, measurement noise, and ambient temperature profile. The semi-adiabatic condition was modeled using Robin-type boundary conditions that relate the thermal gradient to the outdoor temperature at the boundary of the simulated domain and was imposed in a stable manner; for well-identifiable sources, ranging from Gaussians to a discontinuous rectangular pulse that a fixed parametric family could not even represent, the total energy released—a magnitude that governs thermal cracking—was recovered with an error below 5 % across the entire grid of measurement conditions, while the equation residual rejected on the order of 80 % of the noise. The central limitation is the actual hydration curve: its extended time scale renders it **weakly identifiable**, a regime in which reducing the network capacity operates as an implicit regularization and the source quality decouples from the field error, the only measurable quantity. This work establishes PINNs as a viable and complementary, mesh-free, and functional-shape-free tool for this inverse problem, with a characterized domain of robustness.

Keywords: physics-informed neural networks; inverse problem; heat of hydration; Robin boundary condition; mass concrete; source identification; identifiability.

Agradecimientos

Primero que nada, a todos mis amigos que estuvieron siempre a mi lado en la sala de clases: Tomás, Domingo, Victoria, Catalina, José Tomás, ya que son los únicos que pueden identificar la mayoría del esfuerzo canalizado en este trabajo, desde un punto de vista cotidiano y familiar, compartiendo triunfos y sufrimientos a lo largo de nuestro trayecto universitario.

A todos esos amigos que brindaron su apoyo y supieron sacar lo mejor de mi, dándome guía y consejo en todo momento: Fernando, Fernan, Facundo, Arturo, José Tomás, Elena, Rafael y muchos otros que estoy dejando de lado a propósito.

A la Universidad y a todos los profesores que aportaron en este trabajo y me acogieron en sus salas y oficinas. A Jorge Tomás dándome la oportunidad de tomar el magíster con él. A José Antonio que nos recibió en este increíble proyecto. A Carlos que nos hizo ver la luz al final del túnel.

A toda la familia que siempre estuvo y estará ahí. Belén por enseñarme a leer y escribir, y Cristián por enseñarme a sumar y restar. Mario y Gabriel que me dan las mejores historias de las que un nieto puede alardear. Mónica y Julia que hasta el día de hoy me reciben siempre con una comida a la hora que sea. Margarita, Julia e Inés que me mantuvieron siempre en la línea. Bernardo que siempre me motiva a mejorar.

Finalmente Andrés y Valeria que me salvaron en mi periodo de mayor duda y frustración.

A todos ellos, gracias.

Índice general

Resumen	IV
Abstract	V
Agradecimientos	VI
1. Introducción	1
1.1. Hipótesis	3
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos específicos	4
1.3. Estructura de la tesis	4
2. Revisión Bibliográfica	7
2.1. Hormigón masivo y agrietamiento térmico en edades tempranas	7
2.2. Modelación térmica y el término fuente $\dot{Q}(t)$	9
2.2.1. Ecuación de conducción de calor	9
2.2.2. Condiciones de borde	10
2.2.3. Modelos para el término fuente	11
2.2.4. Caracterización experimental: calorimetría semiadiabática	12
2.3. El problema inverso para identificar $\dot{Q}(t)$: enfoques clásicos	12
2.4. Redes neuronales informadas por la física (PINNs)	15
2.4.1. De las redes neuronales clásicas a las PINNs	15
2.4.2. Redes neuronales informadas por la física	17
2.5. Estado del arte: entrenamiento estable de PINNs	19
2.6. PINNs en problemas inversos de transferencia de calor	21
2.7. Síntesis y brecha de investigación	22
3. Marco Metodológico	25
3.1. Planteamiento del problema	25
3.1.1. Dominio computacional	26

3.1.2.	Formulación adimensional	27
3.1.3.	Condiciones de borde	27
3.1.4.	Problema directo	28
3.1.5.	Problema inverso	29
3.2.	Estrategia general: dos fases de la investigación	29
3.2.1.	Fase exploratoria: validación de la tecnología	30
3.2.2.	Fase experimental: identificación inversa bajo Robin	31
3.3.	Arquitectura de la red neuronal	32
3.3.1.	Arquitectura base de la fase exploratoria	32
3.3.2.	Configuración de doble red para el problema inverso	33
3.4.	Función de pérdida	34
3.4.1.	Formulación del problema directo	35
3.4.2.	Formulación del problema inverso	35
3.4.3.	Balanceo de pesos basado en NTK	36
3.4.4.	Entrenamiento causal en el tiempo	36
3.5.	Muestreo de puntos de colocación	37
3.5.1.	Distribución espacial	37
3.5.2.	Distribución temporal	37
3.6.	Referencias de validación: FEM y solución analítica	38
3.7.	Implementación y entrenamiento	39
3.7.1.	Adimensionalización y escalado	39
3.7.2.	Optimizador y schedule de learning rate	39
3.7.3.	Validación interna y criterio de parada	40
3.7.4.	Hiperparámetros base	40
3.8.	Validación y métricas de error	41
3.8.1.	Referencias de validación	41
3.8.2.	Métricas cuantitativas	41
3.8.3.	Diagnósticos de generalización y robustez	43
4.	Resultados y Análisis	44
4.1.	Configuración de la evaluación	45
4.2.	Fase exploratoria	46
4.2.1.	Problema directo con condición de Dirichlet	46
4.2.2.	Problema directo con condición de Robin	48
4.2.3.	Problema inverso de validación	50
4.2.4.	Síntesis de la fase exploratoria	53

4.3.	Fase experimental: identificación inversa bajo Robin	55
4.3.1.	Caso base de referencia	55
4.3.2.	Robustez frente a la cobertura de sensores y al nivel de ruido . .	62
4.3.3.	Efecto del perfil de temperatura ambiente	67
4.3.4.	Efecto de la morfología de la fuente	69
4.3.5.	Escala temporal de la fuente de Arrieta y sensibilidad a la arquitectura	73
4.3.6.	Síntesis comparativa entre experimentos	78
4.3.7.	Robustez de la red reducida y su transferencia entre morfologías	80
4.4.	Discusión	85
5.	Conclusiones	89
5.1.	Conclusiones teóricas	89
5.2.	Conclusiones prácticas	90
5.3.	Síntesis cuantitativa y comparación con el método clásico	91
5.4.	Direcciones futuras	93
5.5.	Comentarios finales	93
	Nomenclatura	95
	Referencias	98
	Apendice	101
A.	Adimensionalización y normalizaciones	101
A.1.	Ecuación de partida y supuestos	101
A.2.	Escalado de las variables	102
A.3.	Forma adimensional de la ecuación interior	103
A.3.1.	Regularización de la singularidad en el eje	103
A.4.	Adimensionalización de las condiciones de borde	104
A.4.1.	Condición de Robin sobre la pared lateral	104
A.4.2.	Condición de Robin sobre las tapas	104
A.4.3.	Simetría axial	105
A.4.4.	Casos de validación bajo Dirichlet	105
A.5.	Escalado de la temperatura y de la fuente	105
B.	Derivación de la solución analítica de referencia	107
B.1.	Planteamiento	107

B.2. Separación de variables y problemas de autovalores	108
B.2.1. Parte radial: autofunciones de Bessel	108
B.2.2. Parte axial: modos cosenoidales	109
B.3. Proyección de la condición inicial y de la fuente	109
B.4. Evolución temporal: integral de Duhamel	110
B.5. Solución y evaluación numérica	111
C. Configuración experimental y de sensores	112
C.1. Parámetros físicos	112
C.2. Configuraciones de sensores	113
C.2.1. Fase exploratoria	113
C.2.2. Fase experimental	113
C.3. Niveles de ruido	114
C.4. Hiperparámetros base	115
D. Plan completo de experimentos y resultados	117
D.1. Resultados por campaña	117
D.1.1. Barridos sensor–ruido	117
D.1.2. Casos puntuales	121
D.1.3. Estudio de ablación	121
D.2. Tabla maestra consolidada	123
E. Unidades	127
Unidades	127

Índice de figuras

1.1. Calorímetro de bajo costo elaborado por (Fuentes Ciocca, 2025) dentro del grupo de investigación.	2
1.2. Visión general del proyecto: del fenómeno físico (hidratación del cemento en una probeta cilíndrica) a los dos problemas que estructuran la tesis, directo e inverso y a los enfoques de solución empleados en cada uno. La PINN (★) es la contribución de esta tesis; la solución analítica, la FEM y el método clásico de calibración inversa actúan como referencias de validación y de comparación.	6
2.1. Carácter mal planteado del problema inverso	13
2.2. Esquema del enfoque clásico de calibración inversa	14
2.3. Esquema conceptual de una PINN para el problema inverso	18
3.1. Probeta cilíndrica embebida en el aislante	26
3.2. Arquitectura de la PINN	34
3.3. Distribución de puntos de colocación	38
4.1. Plan de experimentos del Capítulo 4	45
4.2. Validación directo Dirichlet	47
4.3. Validación directo Robin	49
4.4. Robustez de la inversión frente al número de sensores	51
4.5. Fuente recuperada: caso identificable y caso sub-determinado	52
4.6. Caso base: disposición de sensores	56
4.7. Caso base: fuente recuperada	58
4.8. Caso base: Covergencia de la fuente	60
4.9. Caso base: reconstrucción con un único sensor	61
4.10. Robustez Gauss 1: RMSE de la fuente	63
4.11. Robustez Gauss 1: error de pico	64
4.12. Robustez Gauss 1: fuga de ruido	65

4.13. Robustez Gauss 1: RMSE del campo	66
4.14. Robustez pulso rectangular: error de pico	67
4.15. Morfología: pulso rectangular	71
4.16. Morfología: curva de Arrieta	72
4.17. Morfología: convergencia de la fuente	73
4.18. Ablación: profundidad	74
4.19. Ablación: ancho	75
4.20. Ablación: densidad de colocación	76
4.21. Fuente de Arrieta recuperada, configuración de mejor energía	78
4.22. Red reducida vs estándar: R^2 de Arrieta	81
4.23. Red reducida vs estándar: error de energía de Arrieta	82
4.24. Red reducida vs estándar: error de pico de Arrieta	82
4.25. Red reducida vs estándar: R^2 de Gauss y rectangular	83
4.26. Red reducida vs estándar: error de energía de Gauss y rectangular . . .	84
4.27. Red reducida vs estándar: RMSE del campo de Gauss y rectangular . .	84

Índice de tablas

3.1. Hiperparámetros base	41
4.1. Métricas del campo de temperatura para los casos directos con condición de Dirichlet (PINN vs FEM). El error L^2 relativo se calcula respecto del rango térmico de cada caso.	47
4.2. Métricas del campo de temperatura para los casos directos con condición de Robin (PINN vs solución analítica). El error L^2 relativo se calcula respecto del rango térmico de cada caso.	49
4.3. Identificación inversa de la fuente bajo Dirichlet en función del número de sensores. La fila held-out reporta el RMSE en los nodos no utilizados como datos de entrenamiento; el símbolo – indica que no hay nodos held-out porque la totalidad de ellos se usó como sensores.	51
4.4. Métricas del caso base de referencia (Gauss 1, ambiente constante, nueve sensores, sin ruido). El campo de temperatura se compara contra el FEM y la fuente recuperada contra la curva de referencia. El RMSE y el máximo puntual del campo están en °C; los de la fuente, en unidades de la curva de referencia.	57
4.5. Diagnóstico de generalización del caso base (sin ruido) al reducir la cobertura de sensores. El RMSE en held-out es el error en los nodos no usados como datos; el símbolo – indica que la configuración A emplea los nueve nodos y no deja nodos held-out. La calidad de la fuente recuperada se mantiene aun reduciendo la información a un único sensor.	61
4.6. Coeficiente de determinación $R^2(\dot{Q})$ de la fuente recuperada (Gauss 1) en la grilla cobertura de sensores $\times$ nivel de ruido. La calidad se conserva en una meseta y solo colapsa en la esquina de un sensor con ruido alto.	62
4.7. Error de energía de la fuente recuperada [%] (Gauss 1) en la grilla cobertura de sensores $\times$ nivel de ruido. El error permanece acotado por debajo del 5 % en todas las combinaciones.	64

4.8.	Calidad de la reconstrucción para distintos perfiles de temperatura ambiente, con fuente de (Arrieta Costa, 2025), nueve sensores y sin ruido. La referencia del campo es la simulación FEM, dado que la solución analítica no aplica con ambiente variable. Cada fila corresponde a una única corrida.	68
4.9.	Calidad de la fuente recuperada para distintos perfiles de referencia, a cobertura máxima de sensores y sin ruido. $T_{\max}$ es el horizonte temporal de cada experimento.	69
4.10.	Resumen comparativo de casos representativos de la fase experimental, con arquitectura estándar. Las filas abarcan el mejor caso, la esquina de medición más degradada, una morfología no suave y la fuente de Arrieta bajo ambiente constante y bajo una oscilación amplia.	79
5.1.	Síntesis cuantitativa de la identificación inversa	91
C.1.	Parámetros físicos de la probeta y del material.	113
C.2.	Coordenadas de los nodos sensorizados de la fase exploratoria.	114
C.3.	Subconjuntos de nodos por configuración de sensores en la fase exploratoria.	114
C.4.	Coordenadas de los nodos sensorizados de la fase experimental.	115
C.5.	Subconjuntos de nodos por configuración de sensores en la fase experimental.	115
C.6.	Niveles de ruido de medición.	116
C.7.	Hiperparámetros base de las redes en la configuración inversa.	116
D.1.	Resultados de la campaña: Fuente gaussiana 1, ambiente constante.	118
D.2.	Resultados de la campaña: Fuente gaussiana 2, ambiente constante.	118
D.3.	Resultados de la campaña: Fuente rectangular, ambiente constante.	119
D.4.	Resultados de la campaña: Fuente gaussiana 1, ambiente constante (repetición).	119
D.5.	Resultados de la campaña: Fuente de Arrieta, ambiente constante.	120
D.6.	Resultados de la campaña: Fuente de Arrieta, ambiente sinusoidal 20 ± 5 °C.	120
D.7.	Tiempo de cómputo en minutos de la identificación inversa por campaña. Todas las corridas se ejecutaron en una GPU NVIDIA GeForce RTX 4060 Ti, con 40 000 pasos de optimización y sin refinamiento L-BFGS. Los tiempos están en minutos.	121
D.8.	Resultados de los casos puntuales evaluados en configuración de referencia (sensores A, ruido A).	121

D.9. Estudio de ablación sobre profundidad, ancho y densidad de colocación (fuente de Arrieta, ambiente senoidal de ± 1 °C, sensores B, ruido B).	122
D.10. Resultados consolidados de todas las corridas de la fase experimental.	123
D.11. Resultados de la red reducida (red del campo de temperatura de cuatro capas y 256 unidades, frente a las seis capas de la configuración estándar), ambiente constante. Las cinco primeras filas corresponden a la fuente de Arrieta en puntos representativos de la grilla de sensores y ruido; las dos últimas, a las fuentes bien identificables Gauss 1 y rectangular en el caso base. RMSE_{fwd} en °C; R_{fwd}^2 es el ajuste del campo (PINN vs FEM) y R_{src}^2 el de la fuente recuperada; E_{err} y pico son los errores relativos de energía y de valor máximo de la fuente.	126

Capítulo 1

Introducción

El hormigón masivo, presente en obras de gran envergadura como represas, puentes y fundaciones (American Concrete Institute, 2005), libera durante la hidratación del cemento una cantidad considerable de calor que no alcanza a disiparse desde el núcleo hacia el ambiente a la misma velocidad con que la superficie lo intercambia con el exterior (Mehta & Monteiro, 2014). El gradiente térmico resultante induce tensiones internas que, en edades tempranas y con el material aún sin resistencia significativa, pueden provocar agrietamiento (Aniskin & Nguyen, 2019). Este agrietamiento compromete la durabilidad de la estructura a largo plazo, al abrir rutas de transporte para agentes agresivos (Li & Li, 2019), por lo que su control durante la fase de diseño es una preocupación central en este tipo de obras (American Concrete Institute, 2021).

Predecir el comportamiento térmico del elemento, y con ello el riesgo de agrietamiento, requiere conocer la curva de generación de calor de hidratación $\dot{Q}(t)$, que actúa como término fuente en la ecuación de calor que se utiliza para modelar la evolución térmica del concreto durante su etapa de curado. Esta curva es específica de cada mezcla de hormigón y de las condiciones de vertido, por lo que no puede suponerse conocida a priori y debe identificarse experimentalmente, típicamente a partir de los registros de temperatura de un calorímetro semiadiabático. Recuperar la fuente a partir de esas mediciones constituye un problema inverso en condiciones adiabáticas (es decir, sin intercambio de calor entre el medio y la probeta), más difícil de resolver que su contraparte directa, ya que pequeñas perturbaciones en los datos pueden traducirse en variaciones considerables de la fuente recuperada (Hadamard, 1923). La fuente de generación de calor se obtiene directamente como la derivada del incremento de temperatura medido, en



Figura 1.1: Calorímetro de bajo costo elaborado por (Fuentes Ciocca, 2025) dentro del grupo de investigación.

condiciones, semi-adiabáticas, es necesario estimar las pérdidas de calor con el medio para poder determinar con precisión la curva de generación de calor. Esto se dificulta particularmente si las variaciones exteriores de temperatura son comparables a los cambios térmicos que generan el calor y las mediciones son ruidosas.

El enfoque convencional para este problema inverso combina una simulación de elementos finitos con un algoritmo de optimización que ajusta los parámetros de una forma funcional predefinida para la fuente (Arrieta Costa, 2025). Si bien esta metodología ha demostrado ser efectiva, presenta tres limitaciones: impone una forma funcional a priori que restringe las morfologías representables, anida una simulación completa dentro de cada iteración del optimizador, y depende de una discretización del dominio que dificulta su transferencia a otras geometrías. Esto resulta en un proceso de aproximadamente 8 horas de computo con 16 procesadores en elementos finitos y un optimizador global para obtener resultados mejorables, motivando así la exploración de alternativas.

Las redes neuronales informadas por la física (PINNs) (Raissi, Perdikaris & Karniadakis, 2019) ofrecen un marco que aborda esas tres limitaciones de manera natural, al representar la fuente mediante una red neuronal sin forma funcional impuesta, prescindir de una malla y aprender el campo de temperatura y la fuente de forma simultánea.

La presente tesis explora el uso de PINNs para identificar la curva de generación de calor de hidratación de una probeta de hormigón a partir de registros de calorimetría, bajo la condición de borde convectiva que caracteriza a un calorímetro real, y se construye directamente sobre el trabajo de calibración inversa clásica que la antecede (Arrieta Costa, 2025). El trabajo evalúa la viabilidad del enfoque, caracteriza su robustez frente a las condiciones de un ensayo real y delimita sus alcances y limitaciones frente al método clásico.

1.1. Hipótesis

La hipótesis de trabajo de esta tesis es que las PINNs permiten identificar la curva de generación de calor de hidratación $\dot{Q}(t)$ a partir de mediciones de temperatura de un calorímetro semiadiabático, bajo la condición de borde convectiva realista y sin imponer una forma funcional a priori sobre la fuente, constituyendo una alternativa viable y complementaria al método clásico de calibración inversa. Esta hipótesis se desglosa en las siguientes preguntas de investigación:

- P.I 1: ¿Puede una PINN identificar la curva de generación de calor $\dot{Q}(t)$ a partir de mediciones de temperatura, bajo condición de borde convectiva de Robin y sin imponer una forma funcional a la fuente?
- P.I 2: ¿Cuán robusta es esa identificación frente a las condiciones propias de un ensayo real, esto es, la morfología de la fuente, la cobertura de sensores, el ruido de medición y el perfil de temperatura ambiente, y cuáles son sus límites de identificabilidad?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Desarrollar y evaluar una metodología basada en PINNs para identificar la curva de generación de calor de hidratación $\dot{Q}(t)$ del cemento, a partir de mediciones de temperatura de un calorímetro semiadiabático y bajo condición de borde de Robin, como alternativa al método clásico de calibración inversa.

1.2.2. Objetivos específicos

- a) Formular los problemas directo e inverso de transferencia de calor en la probeta cilíndrica y adaptar un marco de PINNs para el entrenamiento estable con una configuración de doble red, a la identificación de la fuente.
- b) Validar de forma incremental la metodología sobre subproblemas de complejidad creciente, abarcando las condiciones de Dirichlet y Robin y los problemas directo e inverso, contrastando contra referencias de elementos finitos y analíticas.
- c) Caracterizar el desempeño y la robustez de la identificación inversa bajo Robin frente a la morfología de la fuente, la cobertura de sensores, el nivel de ruido y el perfil de temperatura ambiente.
- d) Contrastar el enfoque con el método clásico de calibración inversa, identificando sus ventajas, limitaciones y las condiciones bajo las cuales resulta competitivo.

1.3. Estructura de la tesis

Esta tesis se organiza en cinco capítulos, cuyo contenido se describe a continuación:

- a) Capítulo 1: presenta la motivación de la investigación, la hipótesis de trabajo, los objetivos y la estructura del documento.
- b) Capítulo 2: revisa los antecedentes del problema, desde el agrietamiento térmico del hormigón masivo y el término fuente $\dot{Q}(t)$ hasta los enfoques clásicos de identificación inversa y las PINNs, cerrando con la brecha de investigación.
- c) Capítulo 3: detalla la metodología, incluyendo la formulación del problema, la estrategia en dos fases, la arquitectura de las redes, la función de pérdida, el muestreo, la solución analítica de referencia y las métricas de validación.
- d) Capítulo 4: presenta y analiza los resultados de la fase exploratoria y de la fase experimental de identificación inversa bajo Robin, y discute el contraste con el método clásico.

- e) Capítulo 5: reúne las conclusiones teóricas y prácticas, las direcciones de trabajo futuro y los comentarios finales.

A lo largo del documento, el lector puede apoyarse en la Figura 1.2, que ofrece una visión de conjunto del trabajo y a la que se hará referencia de forma recurrente. El esquema organiza el problema en tres niveles. En el primero está el fenómeno físico: la hidratación del cemento en una probeta cilíndrica, cuyo comportamiento térmico se describe mediante la ecuación de calor de Fourier con un término fuente $\dot{Q}(t)$ y condiciones de borde de tipo Dirichlet (validación) o Robin (caso real). Sobre este modelo se definen dos problemas complementarios: el *problema directo*, que con $\dot{Q}(t)$ conocido calcula el campo de temperatura $T(t, r, z)$ y sirve de banco de prueba; y el *problema inverso*, objetivo central de la tesis, en el que $\dot{Q}(t)$ es desconocida y debe identificarse a partir de las mediciones de los sensores. Cada problema se aborda con enfoques que cumplen roles distintos: la solución analítica y la simulación por elementos finitos (FEM) actúan como referencias de validación, mientras que la red neuronal informada por la física (PINN), marcada con $\star$, es el método cuya capacidad investiga este trabajo, en contraste con el enfoque clásico de calibración inversa. Esta separación entre los dos problemas y los distintos métodos guía la lectura del resto del documento. Finalmente es importante notar al lector, que todas las unidades para los terminos utilizados en el alcance de la tesis se pueden encontrar en el Apéndice E.

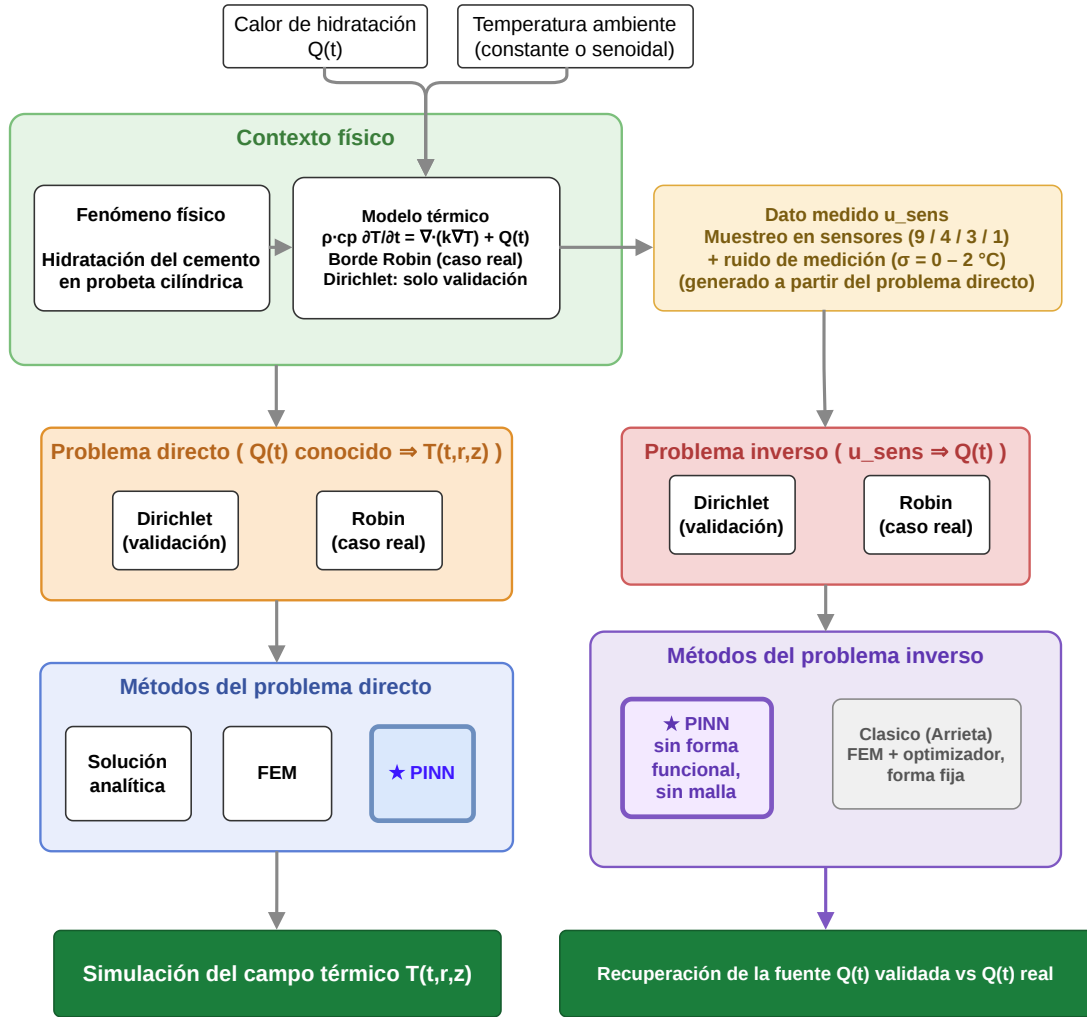


Figura 1.2: Visión general del proyecto: del fenómeno físico (hidratación del cemento en una probeta cilíndrica) a los dos problemas que estructuran la tesis, directo e inverso y a los enfoques de solución empleados en cada uno. La PINN (★) es la contribución de esta tesis; la solución analítica, la FEM y el método clásico de calibración inversa actúan como referencias de validación y de comparación.

Capítulo 2

Revisión Bibliográfica

Este capítulo reúne los antecedentes necesarios para situar el problema abordado en esta tesis dentro de su contexto físico y metodológico. La exposición sigue una lógica de creciente especificidad. Se parte del fenómeno de interés, esto es, el calor liberado durante la hidratación del cemento y el agrietamiento térmico que este induce en elementos de hormigón masivo, para luego presentar la formulación matemática del problema mediante la ecuación de calor de Fourier y el rol del término fuente $\dot{Q}(t)$. Sobre esta base se revisan los enfoques clásicos para la identificación de $\dot{Q}(t)$ y sus limitaciones, lo que motiva la introducción de las PINNs como alternativa. Finalmente, se examina el estado del arte en el entrenamiento estable de PINNs y su aplicación a problemas inversos de transferencia de calor, cerrando con la brecha de investigación que el presente trabajo busca abordar.

2.1. Hormigón masivo y agrietamiento térmico en edades tempranas

Se denomina hormigón masivo a cualquier volumen de hormigón con dimensiones lo suficientemente grandes como para requerir medidas que controlen la generación de calor producto de la hidratación del cemento y los cambios de volumen asociados, con el fin de minimizar el agrietamiento (American Concrete Institute, 2005). Este tipo de elementos es frecuente en obras de gran envergadura tales como represas, puentes y fundaciones de edificaciones. Como criterio operativo, la *Especificación para Hormigón*

Masivo Estructural del Instituto del Cemento y del Hormigón de Chile establece que los elementos estructurales cuya dimensión menor sea igual o superior a 0,8 m y que presenten una dosis de cemento mayor a 360 kg/m^3 , o un grado de resistencia a compresión igual o superior a 35 MPa, requieren de una evaluación para determinar si deben tratarse como hormigón masivo (Instituto del Cemento y del Hormigón de Chile, 2019). La relevancia de esta clasificación radica en el proceso de hidratación del cemento, una serie de reacciones químicas exotérmicas que ocurren de manera simultánea al entrar en contacto los compuestos cementicios con el agua. Estas reacciones liberan una cantidad considerable de calor que eleva la temperatura del elemento (Mehta & Monteiro, 2014). En un elemento masivo, el calor generado en el núcleo no logra disiparse hacia el ambiente a la misma velocidad con que la superficie intercambia calor con el exterior, lo que produce un gradiente térmico entre ambas zonas. Este gradiente induce una expansión diferencial del material que, al encontrarse restringida y desarrollarse en una etapa en que el hormigón aún no ha alcanzado una resistencia mecánica significativa, genera tensiones internas capaces de provocar agrietamiento en edades tempranas (Aniskin & Nguyen, 2019).

Las consecuencias de este agrietamiento comprometen el desempeño de la estructura a largo plazo. Las grietas, sumadas a la porosidad propia del hormigón, abren nuevas rutas de transporte para agentes agresivos provenientes del exterior, tales como agua, dióxido de carbono y soluciones iónicas, lo que reduce la durabilidad esperada del elemento (Li & Li, 2019). A esto se añade el riesgo de formación tardía de etringita, fenómeno asociado a temperaturas elevadas durante la hidratación que provoca una expansión continua del material y un consecuente deterioro estructural de difícil detección y reparación (Wang, Jin, Pang, Li, Dong & Chen, 2023).

Frente a estos riesgos, la normativa internacional, en particular la guía ACI 207.1R-21 (American Concrete Institute, 2021), establece límites y recomendaciones para el control del agrietamiento térmico en hormigón masivo. En Chile no existe una normativa vigente específica para este tipo de elementos; la referencia disponible es la especificación del ICH (Instituto del Cemento y del Hormigón de Chile, 2019), que recoge requisitos generales basados en la guía ACI. Esta especificación limita la temperatura máxima admisible en el núcleo del elemento y el diferencial de temperatura entre el núcleo y la superficie, definiendo dichos límites en función de la importancia estructural de la obra

y de su condición de exposición ambiental. El cumplimiento de estos límites depende de poder predecir el comportamiento térmico del elemento durante su fase de diseño, lo que motiva la modelación matemática del fenómeno que se aborda en la siguiente sección.

2.2. Modelación térmica y el término fuente $\dot{Q}(t)$

La predicción del comportamiento térmico de un elemento de hormigón masivo requiere describir matemáticamente cómo se transfiere y se acumula el calor en su interior. Esta sección presenta la ecuación que gobierna el fenómeno, las condiciones de borde que completan su formulación, los modelos disponibles para representar el término fuente y la técnica experimental con que este se caracteriza.

2.2.1. Ecuación de conducción de calor

El mecanismo dominante de transferencia de calor en un sólido es la conducción, gobernada por la ley de Fourier, que establece que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura y opuesto a este, de modo que el calor se desplaza desde las zonas de mayor hacia las de menor temperatura (Cengel & Castellanos, 2007):

$$\vec{q} = -k \nabla T, \quad (2.1)$$

donde $\vec{q}$ es el vector de flujo de calor, k la conductividad térmica del material y ∇T el gradiente de temperatura. Al aplicar un balance de energía sobre un elemento diferencial de volumen e incorporar un término de generación interna, se obtiene la ecuación de conducción de calor en su forma general (Serth & Lestina, 2014):

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{Q}(t), \quad (2.2)$$

donde T es el campo de temperatura, ρ la densidad, c_p el calor específico del material y $\dot{Q}(t)$ el término fuente, que representa la energía generada por unidad de volumen y de tiempo. En el contexto del hormigón masivo, este término fuente corresponde precisamente al calor liberado por la hidratación del cemento, y constituye la incógnita central de este trabajo. Su importancia radica en que $\dot{Q}(t)$ es específico de cada mezcla de hor-

migón, ya que depende de la composición del cemento, la dosificación y las condiciones de curado, por lo que no puede asumirse conocido a priori para una mezcla arbitraria.

2.2.2. Condiciones de borde

La ecuación (2.2) admite infinitas soluciones; para que el problema quede bien planteado es necesario especificar, además de la condición inicial, el estado del campo de temperatura sobre la frontera del dominio mediante condiciones de borde. Según la naturaleza física del intercambio térmico en cada superficie, estas condiciones se clasifican en tres tipos fundamentales (Cengel & Castellanos, 2007; Serth & Lestina, 2014).

La condición de *Dirichlet*, o de primer tipo, prescribe directamente el valor de la temperatura sobre la frontera,

$$T = T_s \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (2.3)$$

donde T_s es una temperatura conocida, posiblemente dependiente del tiempo. Representa una superficie cuya temperatura se mantiene fija, por ejemplo por contacto con un medio a temperatura controlada, y constituye la idealización más simple del comportamiento del borde.

La condición de *Neumann*, o de segundo tipo, prescribe el flujo de calor a través de la frontera, esto es, el gradiente de temperatura en la dirección normal,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_s \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (2.4)$$

donde $\partial T / \partial n$ es la derivada en la dirección de la normal exterior $\mathbf{n}$ y q_s el flujo impuesto. El caso particular $q_s = 0$ corresponde a una frontera adiabática o aislada, en la que no hay intercambio de calor; esta forma homogénea es también la que expresa una condición de simetría, donde el flujo neto a través del plano de simetría es nulo.

La condición de *Robin*, o de tercer tipo, modela el intercambio convectivo entre la superficie y el medio circundante, igualando el flujo conductivo en el borde al flujo convectivo hacia el ambiente,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \beta (T - T_{\text{env}}) \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (2.5)$$

donde β es el coeficiente de transferencia de calor por convección y T_{env} la temperatura del ambiente. Esta condición acopla el valor de la temperatura en la frontera con su gradiente y constituye una combinación de las dos anteriores: recupera la condición de Dirichlet cuando $\beta \rightarrow \infty$, esto es, cuando la superficie se equilibra instantáneamente con el ambiente, y la de Neumann adiabática cuando $\beta \rightarrow 0$, cuando la superficie queda aislada. Por modelar de manera realista el intercambio térmico de un cuerpo con su entorno, la condición de Robin es la físicamente representativa del comportamiento de un calorímetro semiadiabático, en el que la superficie de la probeta intercambia calor con el exterior a través de un aislante.

2.2.3. Modelos para el término fuente

Para estimar $\dot{Q}(t)$ se han desarrollado distintos modelos. Un enfoque ampliamente utilizado es el de carácter macroscópico propuesto por (Swaddiwudhipong, Wu & Zhang, 2003), que describe la cinética de hidratación mediante una ecuación de tipo Kolmogoroff-Erofeev. En esta formulación, el grado de hidratación $\alpha(t)$ de cada compuesto principal del cemento evoluciona según

$$\alpha(t) = 1 - e^{-a(\log t)^b}, \quad (2.6)$$

donde a y b son parámetros cinéticos propios de cada compuesto y t es el tiempo transcurrido desde el contacto inicial con el agua. A partir de esta expresión, la tasa instantánea de generación de calor de cada compuesto puede escribirse como

$$\dot{Q}_i(t) = 0,43 \cdot Q_{i,\max} \cdot \frac{a b (\log t)^{b-1}}{t e^{a(\log t)^b}}, \quad (2.7)$$

con $Q_{i,\max}$ el calor máximo de hidratación del compuesto i . La curva completa de generación de calor de la mezcla se obtiene sumando los aportes de los principales compuestos del cemento. Esta familia de modelos resulta útil para predecir el comportamiento térmico del hormigón, aunque impone una forma funcional fija sobre la curva, condicionada por la estructura de las expresiones anteriores.

2.2.4. Caracterización experimental: calorimetría semiadiabática

La obtención de $\dot{Q}(t)$ no es solo un problema de modelación, sino que también requiere de datos experimentales que caractericen la mezcla. La técnica habitual para este propósito es la calorimetría semiadiabática, empleada para medir el calor de hidratación de muestras de hormigón a lo largo de un periodo determinado. Un calorímetro semiadiabático es un sistema de medición diseñado para estar térmicamente aislado y minimizar la pérdida de calor hacia el ambiente, aunque siempre subsiste un pequeño intercambio térmico con el exterior, lo que lo distingue de un calorímetro adiabático ideal. Durante el ensayo se registran las variaciones de temperatura de la muestra a lo largo del tiempo, y estos perfiles térmicos constituyen la información a partir de la cual debe identificarse la curva $\dot{Q}(t)$ (Arrieta Costa, 2025). El modo en que se realiza esta identificación, esto es, recuperar el término fuente a partir de mediciones de temperatura, es lo que define el problema inverso que se aborda en la siguiente sección.

2.3. El problema inverso para identificar $\dot{Q}(t)$: enfoques clásicos

La determinación del término fuente $\dot{Q}(t)$ a partir de mediciones de temperatura constituye un problema inverso. A diferencia del problema directo, en el cual se conoce la fuente y se busca el campo de temperatura resolviendo la ecuación de calor (2.2), el problema inverso recorre el camino contrario: se dispone de un perfil térmico medido y se busca la causa que lo produjo, esto es, la curva de generación de calor. Esta clase de problemas es característicamente más difícil de resolver que su contraparte directa, ya que pequeñas perturbaciones en los datos de temperatura, inevitables en cualquier medición experimental, pueden traducirse en variaciones considerables de la fuente recuperada.

Esta sensibilidad es la manifestación de un problema mal planteado en el sentido de Hadamard: la solución puede no depender de forma continua de los datos, e incluso no ser única, de modo que fuentes distintas pueden reproducir un mismo perfil de temperatura dentro del error de medición. Recuperar una solución estable requiere, por tanto, re-

gularizar el problema, esto es, incorporar información adicional que restrinja el espacio de soluciones admisibles (Hadamard, 1923). En los enfoques clásicos esta regularización se introduce de manera implícita al imponer una forma funcional sobre la fuente: al restringir $\dot{Q}(t)$ a una familia paramétrica reducida se acota fuertemente el espacio de búsqueda y se estabiliza la inversión, a costa de limitar las morfologías representables. Esta doble naturaleza de la forma funcional, restricción y a la vez regularización, será relevante al contrastar ambos enfoques.

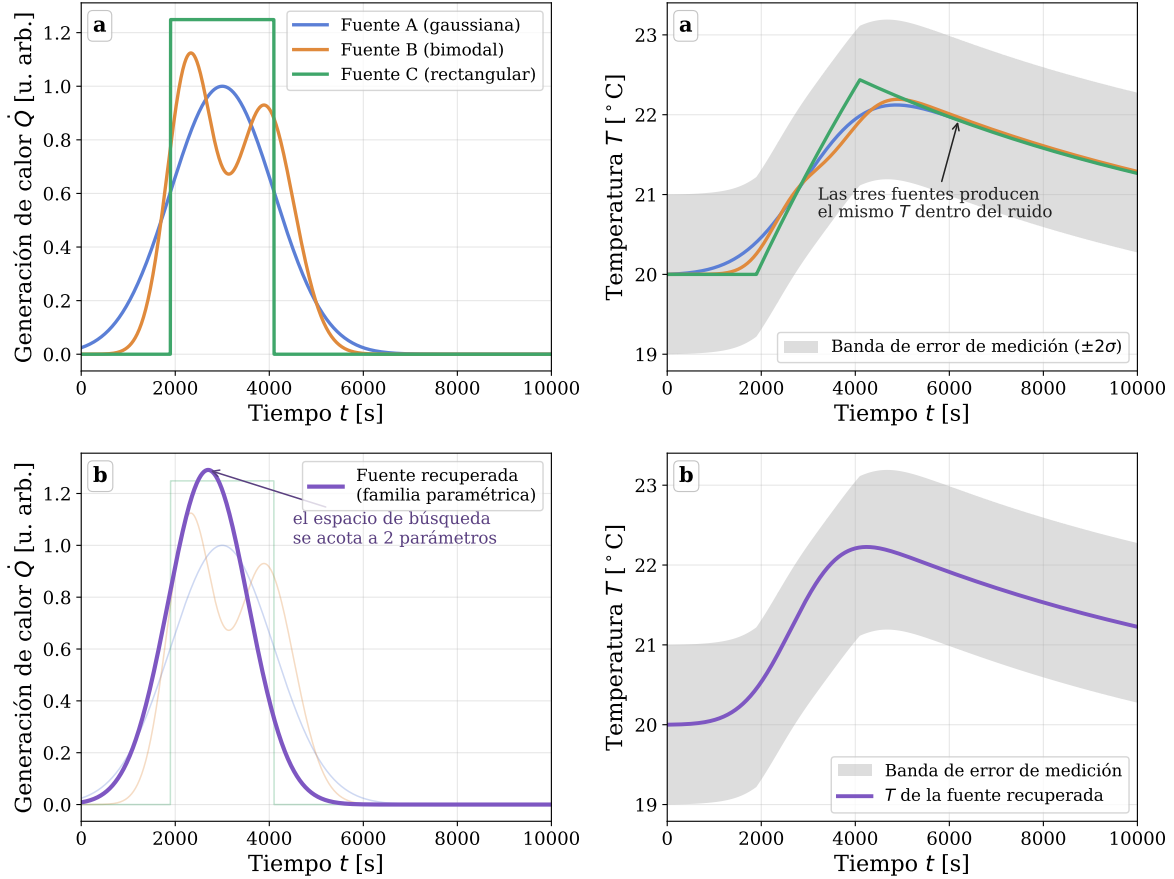


Figura 2.1: Carácter mal planteado del problema inverso en el sentido de Hadamard. (a) Tres fuentes $\dot{Q}(t)$ de morfología distinta pero igual energía producen perfiles de temperatura indistinguibles dentro de la banda de error de medición: el problema no tiene solución única. (b) Al restringir $\dot{Q}(t)$ a una familia paramétrica reducida, el espacio de búsqueda se acota y la inversión se estabiliza. Fuente: elaboración propia.

El enfoque clásico para abordar este problema combina simulación numérica directa con un algoritmo de optimización que ajusta los parámetros de la fuente. El trabajo de (Arrieta Costa, 2025) constituye el antecedente directo de esta tesis y representa este

tipo de estrategia. En él se desarrolla una metodología de calibración inversa orientada a identificar la curva $\dot{Q}(t)$ de una mezcla específica de hormigón a partir de los registros de un calorímetro de bajo costo. El procedimiento parametriza la fuente mediante la formulación cinética descrita en la Sección 2.2, de modo que la curva queda completamente determinada por un conjunto reducido de parámetros. Sobre este espacio de parámetros se aplica un esquema iterativo: para cada propuesta de parámetros se construye la curva $\dot{Q}(t)$, se ejecuta una simulación térmica por elementos finitos de la probeta en OpenSees (Arrieta Costa, 2025), y se evalúa el error entre el perfil de temperatura simulado y el medido experimentalmente. El ajuste de los parámetros se realiza mediante el algoritmo de evolución diferencial, una estrategia de optimización adecuada para problemas no lineales con múltiples mínimos locales, que itera hasta minimizar dicho error.

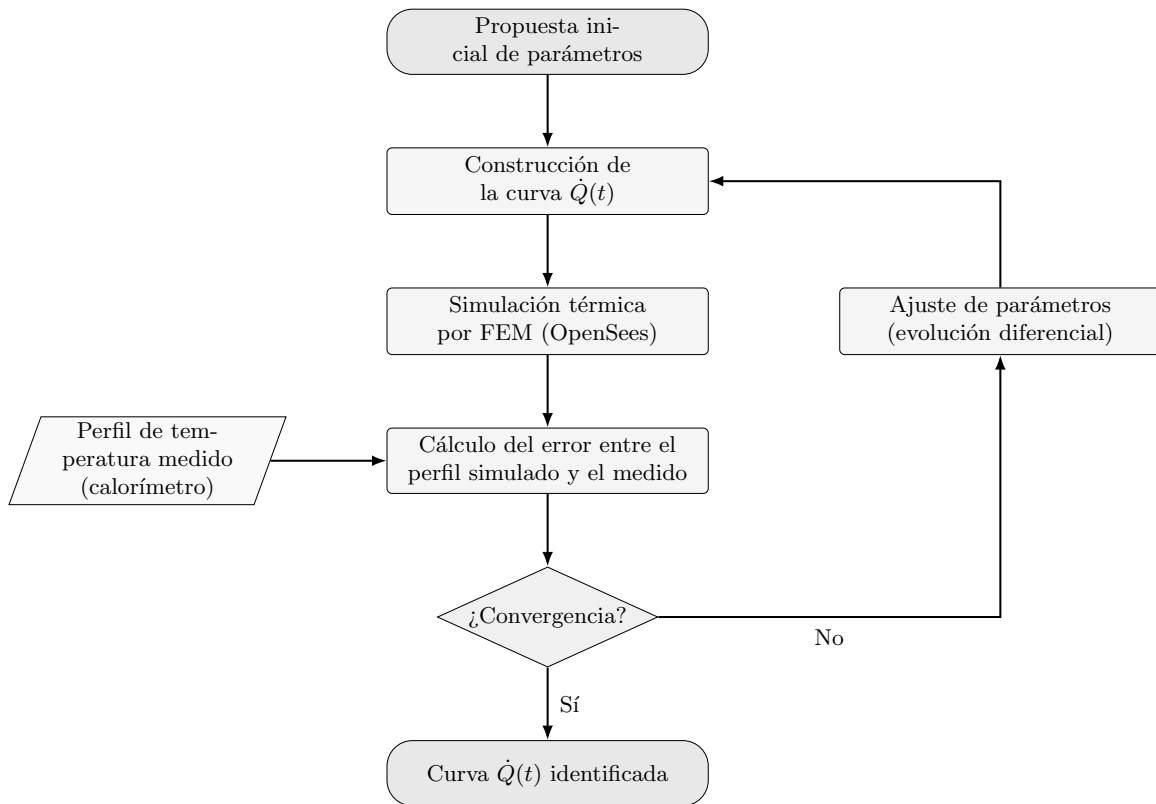


Figura 2.2: Esquema iterativo del enfoque clásico de calibración inversa para la identificación de $\dot{Q}(t)$, basado en simulación por elementos finitos y optimización por evolución diferencial. Fuente: elaboración propia a partir de la metodología de (Arrieta Costa, 2025).

Si bien este tipo de enfoque ha demostrado ser efectivo, presenta limitaciones que motivan la búsqueda de alternativas. La primera es que requiere imponer una forma funcional a priori sobre $\dot{Q}(t)$. La curva recuperada queda restringida a la familia paramétrica elegida, de modo que solo puede representar morfologías compatibles con dicha estructura. Cuando el comportamiento térmico real de una mezcla se aparta de la forma supuesta, el modelo no logra capturarlo. Esta limitación se evidencia en el propio trabajo de (Arrieta Costa, 2025), donde la formulación cinética base subestimaba sistemáticamente el calor liberado en los primeros instantes de la hidratación, lo que obligó a incorporar un término adicional definido por tramos para corregir el ajuste en esa región. Esta corrección, si bien efectiva, ilustra precisamente la rigidez de los enfoques que dependen de una forma funcional predefinida.

Una segunda limitación es de carácter computacional. El esquema descrito anida una simulación numérica completa dentro de cada iteración del optimizador, de manera que el costo total escala con el número de evaluaciones requeridas para converger. A esto se suma la dependencia de una malla: la simulación por elementos finitos exige discretizar el dominio, y el traslado de la metodología a una geometría distinta implica volver a generar la malla correspondiente. En conjunto, estas limitaciones, esto es, la imposición de una forma funcional a priori, el costo de anidar simulaciones dentro de la optimización y la dependencia de una discretización del dominio, motivan la exploración de un enfoque alternativo. Las PINNs, que se introducen en la siguiente sección, ofrecen un marco que aborda estas tres limitaciones de manera natural.

2.4. Redes neuronales informadas por la física (PINNs)

2.4.1. De las redes neuronales clásicas a las PINNs

Antes de describir la formulación de las PINNs conviene precisar en qué se distinguen de una red neuronal en su uso más habitual, ya que ambas comparten la misma arquitectura básica pero difieren por completo en la manera en que aprenden y en lo que producen. Esta distinción es la que explica por qué, en el problema abordado en esta tesis, no aparecen elementos que suelen darse por supuestos al hablar de redes neuronales, como un conjunto de datos de entrenamiento etiquetado o una separación entre

una fase de entrenamiento y una de inferencia.

En su uso clásico, una red neuronal se emplea en un esquema de aprendizaje supervisado: se dispone de un conjunto de entrenamiento formado por pares de entrada y salida conocidos, y la red ajusta sus parámetros para reproducir esa correspondencia minimizando el error entre su predicción y la salida esperada. El conocimiento del problema reside, por tanto, en los datos etiquetados. Una vez completada esta fase de entrenamiento, los parámetros quedan fijos y la red se utiliza en una fase de inferencia distinta, en la que predice la salida para entradas nuevas que no formaron parte del entrenamiento. El objetivo es la generalización: que lo aprendido a partir de un conjunto finito de ejemplos sea válido para casos no vistos.

Una PINN se aparta de este esquema en tres aspectos fundamentales. El primero es la fuente de supervisión. En lugar de aprender de un conjunto de pares entrada-salida etiquetados, la red se entrena para satisfacer la ecuación diferencial que gobierna el problema, evaluada en puntos del dominio denominados puntos de colocación. Estos puntos no llevan asociado un valor de salida conocido: la red no recibe la respuesta correcta en ellos, sino que se la penaliza en la medida en que su predicción no cumple la física. La información que guía el aprendizaje no proviene de etiquetas, sino de la propia ecuación. Por ello no existe un conjunto de entrenamiento en el sentido convencional; cuando hay datos medidos, como las lecturas de un calorímetro en el problema inverso, estos cumplen un papel complementario de anclaje y no constituyen la única ni la principal fuente de supervisión.

El segundo aspecto es que no existe una separación entre una fase de entrenamiento y una de inferencia. Una PINN no se entrena para generalizar a problemas distintos del que resuelve, sino que su entrenamiento consiste precisamente en resolver una instancia concreta del problema. El resultado de minimizar la pérdida es directamente la solución buscada: la red entrenada *es* la solución de la ecuación para las condiciones dadas. Entrenar y resolver son, en este contexto, la misma operación, y no tiene sentido una etapa posterior de inferencia sobre casos nuevos como la que sigue al entrenamiento de una red supervisada clásica.

El tercer aspecto se desprende de los dos anteriores: lo que la red representa. En el uso clásico la red aproxima un mapeo estadístico inferido de los datos, mientras que en una PINN la red *es* la función incógnita del problema, esto es, el campo de temperatura

$T(t, r, z)$ o, en el caso inverso, la curva de generación de calor $\dot{Q}(t)$. La red deja de ser un predictor entrenado sobre ejemplos y pasa a ser la representación continua de la magnitud física que se busca determinar.

Con esta distinción establecida, el resto de la sección detalla cómo se construye la función de pérdida que incorpora la física y cómo esta formulación se adapta tanto al problema directo como al inverso.

2.4.2. Redes neuronales informadas por la física

Las PINNs fueron formalizadas por (Raissi, Perdikaris & Karniadakis, 2019) y constituyen una clase de redes neuronales que incorporan una ecuación diferencial directamente en su función de pérdida. La idea central es representar la solución de la ecuación mediante una red neuronal y entrenarla de modo que, además de ajustarse a los datos disponibles, satisfaga las leyes físicas que gobiernan el problema. De esta manera, la física no se impone resolviendo numéricamente la ecuación, sino que se introduce como una restricción que la red debe cumplir durante el entrenamiento.

Concretamente, una red u_θ con parámetros θ aproxima el campo de interés, en este caso la temperatura $T(t, r, z)$. La función de pérdida penaliza el grado en que la red incumple las restricciones del problema. Su componente característico es el residual de la ecuación diferencial, definido como el valor que toma la propia ecuación al evaluarla sobre la predicción de la red en un conjunto de puntos del dominio, denominados puntos de colocación. Para la ecuación de calor de la expresión (2.2), este residual mide cuánto se aparta la salida de la red de satisfacer la física en cada punto. Las derivadas que aparecen en el residual se calculan mediante diferenciación automática, una herramienta que permite obtener gradientes exactos de la red respecto de sus entradas sin recurrir a aproximaciones por diferencias finitas ni a la discretización del dominio. A este término físico se suman otros que imponen las condiciones iniciales y de borde, de modo que minimizar la pérdida total equivale a buscar una función que sea consistente con la ecuación y con las condiciones del problema de manera simultánea.

Esta formulación admite dos modos de uso que resultan centrales para este trabajo. En el problema directo, el término fuente $\dot{Q}(t)$ es conocido y la red se entrena para reproducir el campo de temperatura que la física predice, de modo que la PINN actúa como un solucionador de la ecuación diferencial. En el problema inverso, en cambio,

$\dot{Q}(t)$ es desconocida y debe identificarse a partir de mediciones. Para ello, la fuente se representa mediante una segunda red neuronal $s_\phi(t)$ con parámetros ϕ propios, que se entrena conjuntamente con la red de temperatura. A las restricciones físicas del problema, esto es, la ecuación de calor y las condiciones de borde e inicial, se añade un término de datos que ancla el campo de temperatura a un conjunto de mediciones en puntos sensorizados del dominio, de manera que ambas redes se optimizan en un único proceso para satisfacer simultáneamente la física y los datos experimentales.

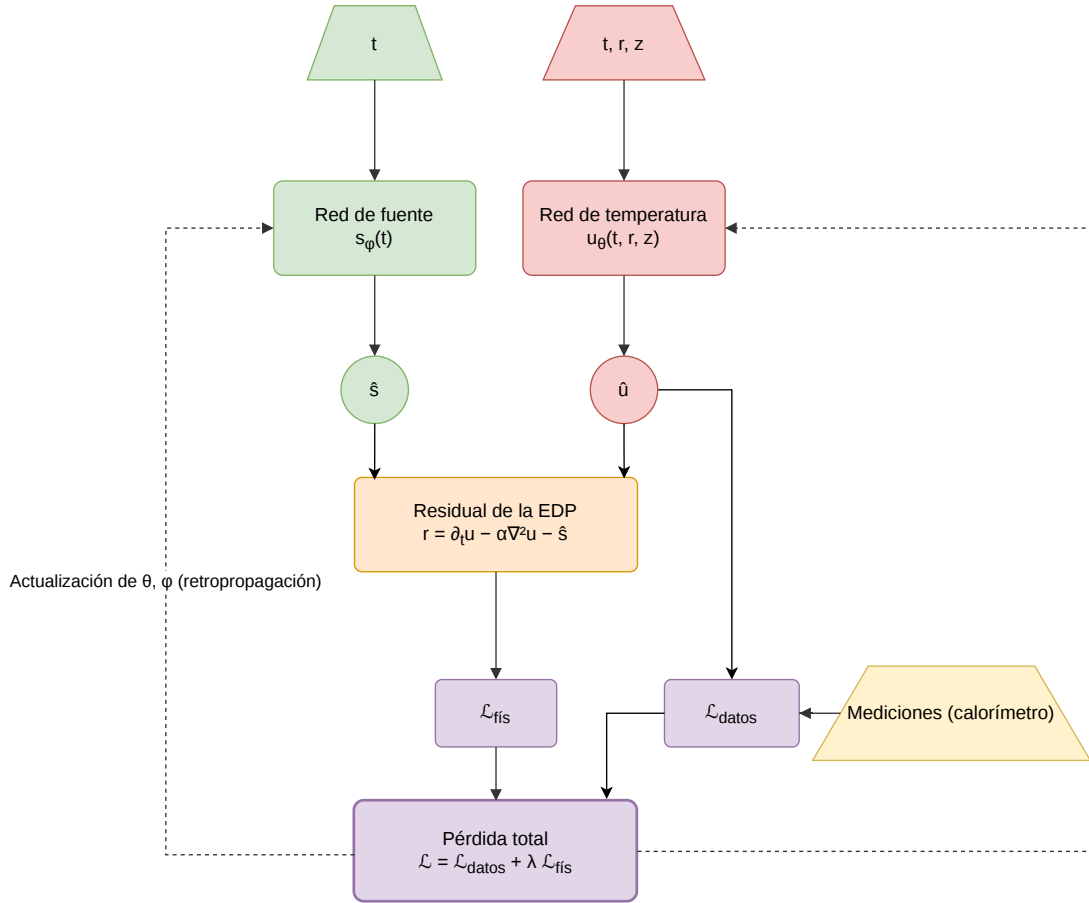


Figura 2.3: Esquema conceptual de una red neuronal informada por la física aplicada al problema inverso. La red de temperatura y la red de fuente se entrenan conjuntamente, combinando el residual de la ecuación de calor con el ajuste a las mediciones experimentales. Fuente: elaboración propia.

Este enfoque aborda de manera natural las tres limitaciones de los métodos clásicos identificadas en la Sección 2.3. En primer lugar, al representar la fuente mediante una red neuronal, no es necesario imponer una forma funcional a priori sobre $\dot{Q}(t)$: la red

puede aproximar curvas de generación de calor de morfologías diversas, lo que resulta particularmente valioso al estudiar mezclas o condiciones de curado cuyo comportamiento térmico no sigue necesariamente la cinética estándar. En segundo lugar, las PINNs son un método sin malla, ya que la ecuación se impone a través del muestreo de puntos de colocación en lugar de una discretización estructurada del dominio; esto evita la generación y el refinamiento de mallas y facilita la transferencia del modelo a otras geometrías. Finalmente, el campo de temperatura y la fuente se aprenden de forma simultánea dentro de un mismo proceso de optimización, en contraste con el esquema clásico que anida una simulación numérica completa dentro de cada iteración del optimizador. Estas características hacen de las PINNs un marco apropiado para el problema inverso de identificación de $\dot{Q}(t)$ abordado en esta tesis. No obstante, su entrenamiento estable no es trivial y depende de un conjunto de técnicas que la literatura reciente ha desarrollado, las cuales se revisan en la siguiente sección.

2.5. Estado del arte: entrenamiento estable de PINNs

Si bien la formulación de las PINNs es conceptualmente directa, su entrenamiento en la práctica dista de ser trivial. La literatura ha documentado que la formulación original de (Raissi, Perdikaris & Karniadakis, 2019), que minimiza una suma simple de los términos de pérdida, sufre de patologías de entrenamiento que pueden llevar a la red a converger hacia soluciones inexactas (Wang, Sankaran, Wang & Perdikaris, 2023). Comprender estas patologías y las técnicas desarrolladas para mitigarlas es necesario, ya que la metodología de esta tesis se construye precisamente sobre dicho conjunto de técnicas.

Se han identificado tres patologías principales. La primera es el sesgo espectral, una tendencia de los perceptrones multicapa a aprender primero las componentes de baja frecuencia de la solución, lo que dificulta la representación de variaciones rápidas y gradientes pronunciados (Rahaman, Baratin, Arpit, Draxler, Lin, Hamprecht, Bengio & Courville, 2019; Wang, Wang & Perdikaris, 2020). La segunda es el desbalance de los términos de pérdida: el residual de la ecuación, las condiciones iniciales y las de borde generan gradientes cuyas magnitudes pueden diferir en órdenes de magnitud, de modo que un término domina el entrenamiento y los demás quedan insuficientemente

minimizados (Wang, Teng & Perdikaris, 2020). La tercera es la violación de la causalidad temporal, que ocurre cuando la red minimiza el residual de la ecuación en instantes tardíos antes de haber resuelto correctamente los tempranos, en contradicción con la dirección física en que se propaga la información en un problema dependiente del tiempo (Wang, Sankaran & Perdikaris, 2022).

Frente a estas dificultades, se han propuesto distintas técnicas que, en conjunto, han pasado a constituir un esquema de referencia para el entrenamiento estable de PINNs. Para mitigar el sesgo espectral se emplea el embedding de características de Fourier, introducido por (Tancik, Srinivasan, Mildenhall, Fridovich-Keil, Raghavan, Singhal, Ramamoorthi, Barron & Ng, 2020), que proyecta las coordenadas de entrada a un espacio de mayor dimensión mediante funciones sinusoidales antes de ingresar a la red, lo que le permite representar funciones de alta frecuencia y estructuras finas de la solución (Wang, Wang & Perdikaris, 2020). En cuanto a la arquitectura, en lugar de un perceptrón multicapa estándar se utiliza una variante modificada propuesta por (Wang, Teng & Perdikaris, 2020), en la que dos transformaciones de la entrada se combinan mediante multiplicaciones punto a punto en cada capa oculta, lo que mejora el flujo de gradientes y la capacidad expresiva de la red en problemas gobernados por ecuaciones diferenciales. A esto se añade la factorización aleatoria de pesos propuesta por (Wang, Wang, Seidman & Perdikaris, 2022), que reparametriza los pesos de cada capa separándolos en una magnitud y una dirección, acelerando la convergencia y reduciendo la sensibilidad a la inicialización.

El desbalance entre términos de pérdida se aborda mediante esquemas de balanceo automático que ajustan periódicamente los pesos relativos de cada componente durante el entrenamiento. Uno de estos esquemas se basa en el Neural Tangent Kernel (NTK), y actualiza los pesos según las trazas de los kernels asociados a cada término, de modo que las distintas componentes converjan a tasas comparables (Wang, Yu & Perdikaris, 2022). La violación de la causalidad temporal, por su parte, se mitiga mediante el entrenamiento causal propuesto por (Wang, Sankaran & Perdikaris, 2022), que descompone el dominio temporal en bloques sucesivos y los pondera de manera que la red minimice primero el residual en los tiempos tempranos antes de atender los tardíos, respetando así la naturaleza causal del fenómeno.

A estas técnicas se suman estrategias de muestreo adaptativo de los puntos de colo-

cación, que los concentran en las regiones donde el residual de la ecuación es mayor o donde la solución varía más rápido, en lugar de distribuirlos de manera uniforme. Este muestreo guiado por la física mejora la exactitud en los transitorios y gradientes pronunciados sin incrementar el número total de puntos (Wu, Zhu, Tan, Kartha & Lu, 2022).

Estas técnicas se encuentran integradas en el framework JAX-PI, presentado por (Wang, Sankaran, Wang & Perdikaris, 2023) como una implementación de referencia de PINNs que reúne las prácticas descritas y demuestra, mediante estudios de ablación sobre un conjunto de problemas de prueba, que cada componente contribuye positivamente a la exactitud del modelo. La metodología desarrollada en esta tesis, detallada en el Capítulo 3, se construye sobre este framework y adapta dicho conjunto de técnicas al problema inverso de identificación de la curva de generación de calor.

2.6. PINNs en problemas inversos de transferencia de calor

La aplicación de PINNs a problemas inversos de transferencia de calor ha recibido atención creciente en los últimos años, en parte porque la formulación del problema inverso se adapta de manera natural al esquema de las PINNs: basta con tratar la cantidad desconocida como un parámetro entrenable adicional, o como la salida de una red auxiliar, e incorporar un término de datos en la función de pérdida. (He, Ni, Wang & Zhang, 2021) fueron de los primeros en proponer un conjunto de arquitecturas basadas en PINNs para resolver problemas directos e inversos de conducción de calor en materiales, abordando tanto la estimación de parámetros constantes como la de un término de generación de calor variable.

Un trabajo cercano al problema de esta tesis es el de (Palar, Aziz, Zuhail, Sambegoro & Dung, 2023), quienes estudian el uso de PINNs para resolver problemas inversos de conducción de calor transiente unidimensional en condiciones realistas, esto es, con un número limitado de puntos de medición y en presencia de ruido. Los autores abordan cuatro casos de identificación: difusividad térmica constante, el par conductividad térmica y capacidad calorífica volumétrica, una generación de calor que varía en el espacio y el tiempo, y una difusividad térmica que varía espacialmente. Sus resultados muestran

que las PINNs pueden estimar las cantidades desconocidas con una exactitud aceptable a partir de pocos puntos de medición, incluso cuando se considera ruido instrumental, aunque el número de puntos debe ser suficiente para capturar correctamente la física del problema. El caso de generación de calor variable es particularmente pertinente para este trabajo, ya que comparte con el problema aquí abordado la identificación de un término fuente que no se reduce a un escalar.

En una dirección similar, (Billah, Khan, Liu & Dutta, 2023) aplican PINNs a un problema de transferencia de calor transiente en una pared plana sometida a un flujo de calor desconocido en una de sus fronteras, mientras la opuesta se mantiene aislada. A partir de un conjunto reducido de mediciones de temperatura con ruido, estiman de forma conjunta una propiedad termofísica del material y el flujo de calor en la frontera, considerando tanto el caso de un flujo constante como el de un flujo que varía en el tiempo. Este antecedente es relevante para esta tesis porque demuestra la capacidad de las PINNs para recuperar simultáneamente un parámetro material y una función del tiempo desconocida a partir de datos limitados, en una configuración con condiciones de borde de tipo Neumann.

En conjunto, estos trabajos confirman que las PINNs constituyen una herramienta viable para problemas inversos de conducción de calor y, en particular, para la identificación de términos fuente o de flujo dependientes del tiempo a partir de mediciones escasas y ruidosas. No obstante, las aplicaciones reportadas se concentran en geometrías y configuraciones de validación, típicamente en una dimensión y con soluciones analíticas o sintéticas de referencia. La identificación de la curva de generación de calor de hidratación del cemento en una probeta de hormigón, a partir de registros de un calorímetro semiadiabático, no ha sido abordada mediante este enfoque, lo que constituye la brecha que el presente trabajo busca cubrir y que se precisa en la siguiente sección.

2.7. Síntesis y brecha de investigación

La revisión presentada en este capítulo permite situar el problema abordado en esta tesis dentro de su contexto. El agrietamiento térmico en edades tempranas es una causa reconocida de pérdida de durabilidad en elementos de hormigón masivo, y su predicción durante la fase de diseño depende de conocer la curva de generación de calor

de hidratación $\dot{Q}(t)$, que actúa como término fuente en la ecuación de calor de Fourier y es específica de cada mezcla. La determinación de esta curva a partir de mediciones de temperatura constituye un problema inverso.

Los enfoques clásicos para resolver este problema inverso, representados por el trabajo de (Arrieta Costa, 2025) que antecede directamente a esta tesis, combinan una simulación numérica por elementos finitos con un algoritmo de optimización que ajusta los parámetros de una familia funcional predefinida para $\dot{Q}(t)$. Si bien estos métodos han demostrado ser efectivos, presentan tres limitaciones: imponen una forma funcional a priori sobre la fuente, lo que restringe las morfologías que esta puede adoptar; anidan una simulación completa dentro de cada iteración del optimizador, con el costo computacional asociado; y dependen de una discretización del dominio, lo que dificulta la transferencia a otras geometrías.

Las PINNs ofrecen un marco que aborda estas tres limitaciones de manera natural, al representar la fuente mediante una red neuronal sin forma funcional impuesta, prescindir de una malla y aprender el campo de temperatura y la fuente de forma simultánea. Su entrenamiento estable, sin embargo, no es trivial y depende de un conjunto de técnicas desarrolladas por la literatura reciente para mitigar patologías como el sesgo espectral, el desbalance de los términos de pérdida y la violación de la causalidad temporal. Asimismo, trabajos recientes han demostrado que las PINNs constituyen una herramienta viable para problemas inversos de conducción de calor, incluida la identificación de términos fuente y de flujo dependientes del tiempo a partir de mediciones escasas y ruidosas.

No obstante, las aplicaciones de PINNs a problemas inversos de transferencia de calor reportadas en la literatura se concentran en configuraciones de validación, generalmente en una dimensión y contrastadas contra soluciones analíticas o sintéticas. La identificación de la curva de generación de calor de hidratación del cemento, en la geometría de una probeta cilíndrica y a partir de los registros de un calorímetro semiadiabático, no ha sido abordada mediante este enfoque. Es precisamente en este vacío donde se inserta la contribución de esta tesis, que explora el uso de PINNs como alternativa al método clásico de calibración inversa empleado por (Arrieta Costa, 2025), aprovechando su capacidad para recuperar $\dot{Q}(t)$ sin imponer una forma funcional a priori. En términos de la Figura 1.2, esta brecha se ubica en la rama del problema inverso: la identificación de

$\dot{Q}(t)$ a partir de las mediciones de temperatura de los sensores, frente a las referencias de validación que aportan el problema directo y el método clásico de calibración inversa. La metodología desarrollada para abordar este problema se detalla en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Marco Metodológico

En este capítulo se detalla la metodología desarrollada para identificar la curva de generación de calor $\dot{Q}(t)$ de hidratación del cemento mediante PINNs. La exposición comienza con el planteamiento del problema y su formulación adimensional, sobre la cual se distinguen el problema directo y el inverso. A continuación se presenta la estrategia general de la investigación, organizada en dos fases: una fase exploratoria, en la que se valida progresivamente la tecnología sobre subproblemas de complejidad creciente, y una fase experimental, en la que se aplica de forma sistemática la configuración objetivo, esto es, el problema inverso bajo condición de borde convectiva (Robin). Posteriormente se describen la arquitectura de las redes, la formulación de la función de pérdida para los problemas directo e inverso, la estrategia de muestreo de puntos de colocación, la solución analítica empleada como referencia exacta de validación, los aspectos de implementación y entrenamiento, y finalmente los criterios y métricas de validación.

3.1. Planteamiento del problema

El objetivo central de este trabajo es identificar la curva de generación de calor $\dot{Q}(t)$ asociada a la hidratación del cemento en una probeta de hormigón, a partir de mediciones de temperatura registradas en un calorímetro semiadiabático. El fenómeno se modela mediante la ecuación de Fourier de transferencia de calor en coordenadas cilíndricas, suponiendo axisimetría:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{Q}(t), \quad (3.1)$$

donde $T(t, r, z)$ es el campo de temperatura, ρ la densidad, c_p el calor específico, k la conductividad térmica y $\dot{Q}(t)$ el término fuente de generación interna, supuesto uniforme en el espacio y dependiente solo del tiempo. Este planteamiento corresponde al nivel superior de la Figura 1.2, el modelo térmico común del que se derivan el problema directo y el problema inverso que estructuran el trabajo.

3.1.1. Dominio computacional

La probeta cilíndrica modelada tiene 75 mm de diámetro y 150 mm de altura, embebida en aislante de poliestireno de alta densidad. Aprovechando la axisimetría, el dominio tridimensional se reduce a un plano en coordenadas (r, z) , sobre el que se resuelve la ecuación de calor para todo instante $t \in [0, T_{\max}]$.

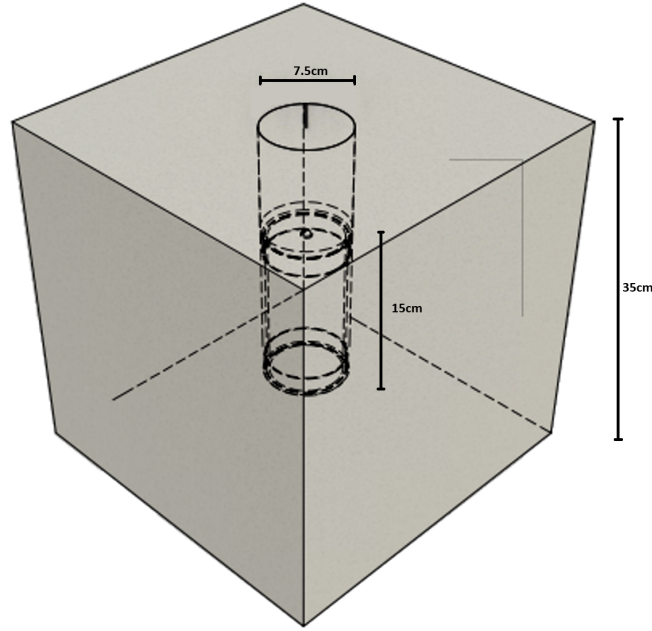


Figura 3.1: Probeta cilíndrica de hormigón embebida en el bloque de aislante de poliestireno, con su eje de simetría axial. Esta es la geometría sobre la que se plantean los problemas directo e inverso de transferencia de calor. Fuente: (Arrieta Costa, 2025).

3.1.2. Formulación adimensional

Para estabilizar el entrenamiento, el problema se resuelve en variables adimensionales. Las coordenadas espaciales se escalan al intervalo unitario mediante $\bar{r} = r/R$ y $\bar{z} = z/H$, con R y H el radio y la altura de la probeta, y el tiempo se adimensionaliza como $\bar{t} = t/T_{\max}$, de modo que el dominio de entrenamiento es $[0, 1]^3$. La temperatura se escala a un campo θ de orden unitario.

Con este escalado, la ecuación (3.1), multiplicada por $\bar{r}$ para evitar la singularidad de coordenadas en el eje $\bar{r} = 0$, adopta la forma adimensional

$$\bar{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} - \text{Fo}_R \left(\bar{r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right) - \text{Fo}_H \bar{r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} - \bar{r} S(\bar{t}) = 0, \quad (3.2)$$

donde $S(\bar{t})$ es la fuente adimensionalizada y los números de Fourier $\text{Fo}_R = \alpha T_{\max}/R^2$ y $\text{Fo}_H = \alpha T_{\max}/H^2$, con $\alpha = k/(\rho c_p)$ la difusividad térmica, controlan la difusión radial y axial respectivamente. El intercambio convectivo en las superficies se caracteriza mediante los números de Biot $\text{Bi}_R = \beta R/k$ y $\text{Bi}_H = \beta H/k$, con β el coeficiente de transferencia de calor. Esta formulación adimensional es además la base sobre la que se construye la solución analítica de referencia descrita en la Sección 3.6.

3.1.3. Condiciones de borde

Sobre el dominio axisimétrico $(\bar{r}, \bar{z})$ se imponen las condiciones de borde correspondientes a las superficies de la probeta y a su eje de simetría. Partiendo de los tres tipos generales introducidos en la Sección 2.2, se expresan aquí en las variables adimensionales de la Sección 3.1.2, en función de los números de Biot Bi_R y Bi_H .

La condición de Dirichlet constituye la idealización más simple del comportamiento del borde. En los experimentos de validación, las superficies de la probeta se fijan directamente a la temperatura ambiente prescrita,

$$\theta = \theta_{\text{env}} \quad \text{sobre la pared y las tapas}, \quad (3.3)$$

donde θ_{env} es la temperatura ambiente adimensional. Al prescribir el valor de la temperatura sobre la frontera, esta condición prescinde del acople convectivo y desacopla la solución interior del comportamiento del borde, lo que simplifica el problema y permite

validar la implementación base sin interferencias adicionales.

En la configuración objetivo, en cambio, el intercambio convectivo en la pared lateral y en las tapas se modela mediante la condición de Robin, que representa el comportamiento físicamente realista del calorímetro. En su forma adimensional, sobre la pared ($\bar{r} = 1$) y sobre las tapas ($\bar{z} = 1$ y $\bar{z} = 0$) adopta la forma

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=1} + \text{Bi}_R (\theta - \theta_{\text{env}}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=1} + \text{Bi}_H (\theta - \theta_{\text{env}}) = 0, \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} - \text{Bi}_H (\theta - \theta_{\text{env}}) = 0, \quad (3.6)$$

donde θ_{env} puede ser constante o variable en el tiempo según el experimento, y el cambio de signo entre las tapas superior e inferior responde al sentido opuesto de la normal exterior en cada una. A diferencia de la condición de Dirichlet, la de Robin acopla el valor de la temperatura en la frontera con su gradiente, introduciendo una interacción entre la solución interior y el flujo en el borde que incrementa la dificultad del problema. Finalmente, la axisimetría del problema impone una condición de Neumann homogénea sobre el eje del cilindro, que garantiza flujo radial nulo y elimina la singularidad de coordenadas en $\bar{r} = 0$,

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=0} = 0. \quad (3.7)$$

Todas estas condiciones, junto con la condición inicial $\theta(\bar{r}, \bar{z}, 0) = \theta_0$, se imponen como términos de penalización en la función de pérdida, según se detalla en la Sección 3.4.

3.1.4. Problema directo

Este es el problema directo de la Figura 1.2, donde $\dot{Q}(t)$ conocida conduce al campo de temperatura $T(t, r, z)$. Sirve como caso de validación para verificar que la red reproduce correctamente la física cuando todos los términos están definidos. Sus restricciones son la condición inicial, las condiciones de borde sobre las superficies del calorímetro (Dirichlet o Robin según el experimento) y la condición de simetría axial, definidas en

la Sección 3.1.3.

3.1.5. Problema inverso

En el problema inverso, $\dot{Q}(t)$ es desconocida y debe identificarse a partir de mediciones de temperatura en sensores internos, que corresponde a la rama inversa de la Figura 1.2, en la que la fuente $\dot{Q}(t)$ se recupera a partir de las mediciones u_{sens} de los sensores. La fuente se parametriza con una red neuronal independiente $s_\phi(\bar{t})$, entrenada conjuntamente con la red de temperatura $u_\theta(\bar{t}, \bar{r}, \bar{z})$. Frente a los métodos clásicos basados en familias paramétricas y evolución diferencial, este enfoque presenta tres ventajas: no requiere imponer una forma funcional a priori sobre $\dot{Q}(t)$; es un método sin malla, lo que facilita la transferencia a otras geometrías sin necesidad de remallar; y aprende el campo de temperatura y la fuente de forma simultánea en un único proceso de optimización. A diferencia de lo que ocurre en algunas formulaciones de PINNs inversas, en este trabajo el término de datos no reemplaza a las restricciones físicas, sino que se añade a ellas: la pérdida inversa conserva el residual de la PDE, las condiciones de borde de Robin, la condición inicial y la simetría axial, e incorpora además un término que ancla el campo de temperatura a las mediciones de los sensores. La formulación precisa se detalla en la Sección 3.4.2.

3.2. Estrategia general: dos fases de la investigación

El problema objetivo de esta tesis, identificar $\dot{Q}(t)$ bajo una condición de borde convectiva realista, combina varias dificultades acopladas: la imposición estable de la condición de Robin, la identificabilidad de la fuente y el balance entre términos de pérdida de magnitudes muy distintas. Abordarlo directamente, sin una validación previa de cada componente, dificulta atribuir un eventual fallo a una causa concreta. Por esta razón, la investigación se estructura en dos fases sucesivas. Ambas fases pueden leerse sobre la Figura 1.2: la fase exploratoria valida la PINN sobre el problema directo contrastándola con la solución analítica y la FEM, y la fase experimental aborda el problema inverso bajo condición de Robin.

3.2.1. Fase exploratoria: validación de la tecnología

La primera fase tiene un propósito instrumental: comprobar que el aparato de PINNs es capaz de resolver el problema térmico antes de aplicarlo al caso objetivo. Para ello se adopta una estrategia de dividir y conquistar, descomponiendo el problema en una secuencia de subproblemas de complejidad creciente que aíslan y validan cada dificultad por separado. La progresión se recorre a lo largo de dos dimensiones complementarias, que pueden seguirse sobre la Figura 1.2: la condición de borde y el tratamiento del término fuente.

La primera dimensión corresponde a la condición de borde y avanza desde Dirichlet hacia Robin. La condición Dirichlet prescribe directamente la temperatura en la superficie y desacopla la solución interior del comportamiento del borde, lo que simplifica el problema numérico y permite validar la implementación base sin interferencias adicionales. La condición Robin, en cambio, modela el intercambio convectivo $-k\nabla T \cdot \mathbf{n} = \beta(T - T_{\text{env}})$ y representa el comportamiento físicamente realista del calorímetro, introduciendo un acople entre la solución interior y el flujo en el borde que incrementa la dificultad del entrenamiento. En este último caso, la temperatura ambiente T_{env} puede ser constante o seguir una historia temporal prescrita.

La segunda dimensión corresponde al término fuente y al tipo de problema: se parte de un escenario sin fuente interna, que verifica la dinámica difusiva pura; se continúa con una fuente conocida, que valida la capacidad de la red para representar el efecto de un término de generación activo en el problema directo; y se culmina con una fuente desconocida, que introduce la red auxiliar $s_\phi(\bar{t})$ y obliga a identificarla a partir de mediciones de temperatura en el problema inverso.

El recorrido conjunto de ambas dimensiones permite verificar, de manera incremental, la imposición correcta de la condición inicial y de las condiciones de borde, la representación del transitorio térmico inducido por una fuente activa y, finalmente, la identificabilidad de la fuente. Cada subproblema se contrasta nodo a nodo contra una simulación de elementos finitos de referencia, de modo que solo se avanza al siguiente nivel una vez verificado el anterior. El término de esta progresión es la configuración objetivo, el problema inverso con condición de borde de Robin, que en la Figura 1.2 ocupa la rama inferior derecha, y cuya validación exitosa habilita la segunda fase.

3.2.2. Fase experimental: identificación inversa bajo Robin

Una vez confirmado que la metodología resuelve de forma estable el problema inverso bajo condición de Robin, la segunda fase consiste en su aplicación sistemática y reiterada para caracterizar el comportamiento del método frente a distintas condiciones. Todos los experimentos de esta fase comparten la configuración objetivo (Robin, inverso) y se diferencian en un conjunto controlado de factores:

- **Perfil de la fuente de referencia.** Se emplean distintas curvas $\dot{Q}(t)$ sintéticas como ground truth, que abarcan desde perfiles gaussianos de distinta forma y un perfil rectangular hasta la curva de hidratación obtenida del trabajo de (Arrieta Costa, 2025), esta última como caso de mayor relevancia física.
- **Perfil de temperatura ambiente.** La condición de Robin se evalúa con ambiente constante y con historias térmicas variables en el tiempo, con el fin de reproducir condiciones de ensayo más realistas.
- **Número y disposición de sensores.** Se varía la cantidad de nodos sensorizados utilizados como datos de entrenamiento, para estudiar el efecto de la cobertura de mediciones sobre la identificabilidad de la fuente.
- **Nivel de ruido.** A las mediciones se les añade ruido gaussiano de media nula y desviación estándar creciente, para evaluar la robustez de la reconstrucción frente a la incertidumbre instrumental.

Adicionalmente, para la fuente de mayor dificultad, la curva de hidratación de Arrieta, débilmente identificable por su escala temporal extensa, se realiza un análisis de sensibilidad de la arquitectura de la red (profundidad y ancho) y de la densidad de puntos de colocación, con el fin de caracterizar su efecto sobre la identificabilidad de la fuente. El conjunto completo de experimentos de esta fase, con la combinación específica de factores de cada uno, se enumera y analiza en el Capítulo 4. La presente fase constituye el cuerpo experimental de la tesis y es la que sustenta las conclusiones sobre el desempeño del método.

3.3. Arquitectura de la red neuronal

La arquitectura empleada difiere entre las dos fases, aunque ambas comparten un núcleo común de prácticas para el entrenamiento estable de PINNs reportadas en la literatura.

3.3.1. Arquitectura base de la fase exploratoria

Los experimentos de la fase exploratoria se construyen sobre el framework JAX-PI (Wang, Sankaran, Wang & Perdikaris, 2023), una implementación de referencia de PINNs en JAX que integra varias de estas prácticas. La arquitectura base combina los siguientes componentes:

- **Embedding de características de Fourier.** Las entradas espacio-temporales $(\bar{t}, \bar{r}, \bar{z})$ se proyectan a un espacio de mayor dimensión mediante funciones sinusoidales con escala fija antes de ingresar a la red. Esta transformación mitiga el sesgo espectral característico de los perceptrones multicapa estándar, que tienden a aprender primero las componentes de baja frecuencia y presentan dificultad para representar variaciones rápidas o gradientes pronunciados (Tancik, Srinivasan, Mildenhall, Fridovich-Keil, Raghavan, Singhal, Ramamoorthi, Barron & Ng, 2020; Wang, Wang & Perdikaris, 2020).
- **Perceptrón multicapa modificado.** En lugar de un perceptrón multicapa estándar, se emplea la variante modificada propuesta por (Wang, Teng & Perdikaris, 2020), en la que dos transformaciones de la entrada se combinan mediante multiplicaciones punto a punto en cada capa oculta, lo que mejora el flujo de gradientes y la capacidad expresiva de la red en problemas gobernados por ecuaciones diferenciales.
- **Factorización aleatoria de pesos.** Los pesos de cada capa densa se reparametrizan factorizándolos en magnitud y dirección, lo que acelera la convergencia y reduce la sensibilidad a la inicialización (Wang, Wang, Seidman & Perdikaris, 2022).

3.3.2. Configuración de doble red para el problema inverso

La fase experimental adopta una configuración de doble red, focalizada en el problema inverso. El campo de temperatura se representa con una red $u_\theta(\bar{t}, \bar{r}, \bar{z})$ y la fuente con una red independiente $s_\phi(\bar{t})$ que toma como entrada el tiempo escalar y devuelve la potencia volumétrica generada. Ambas redes utilizan un embedding de Fourier seguido de capas densas con activación tangente hiperbólica, y se optimizan simultáneamente para satisfacer la PDE, las condiciones del problema y los datos experimentales en un único proceso. Esta implementación retiene los componentes que resultaron decisivos en la fase exploratoria, el embedding de Fourier y el entrenamiento causal descrito en la Sección 3.4.4, y reemplaza el balanceo automático de pesos por un ajuste empírico por experimento, según se justifica en la Sección 3.4.2.

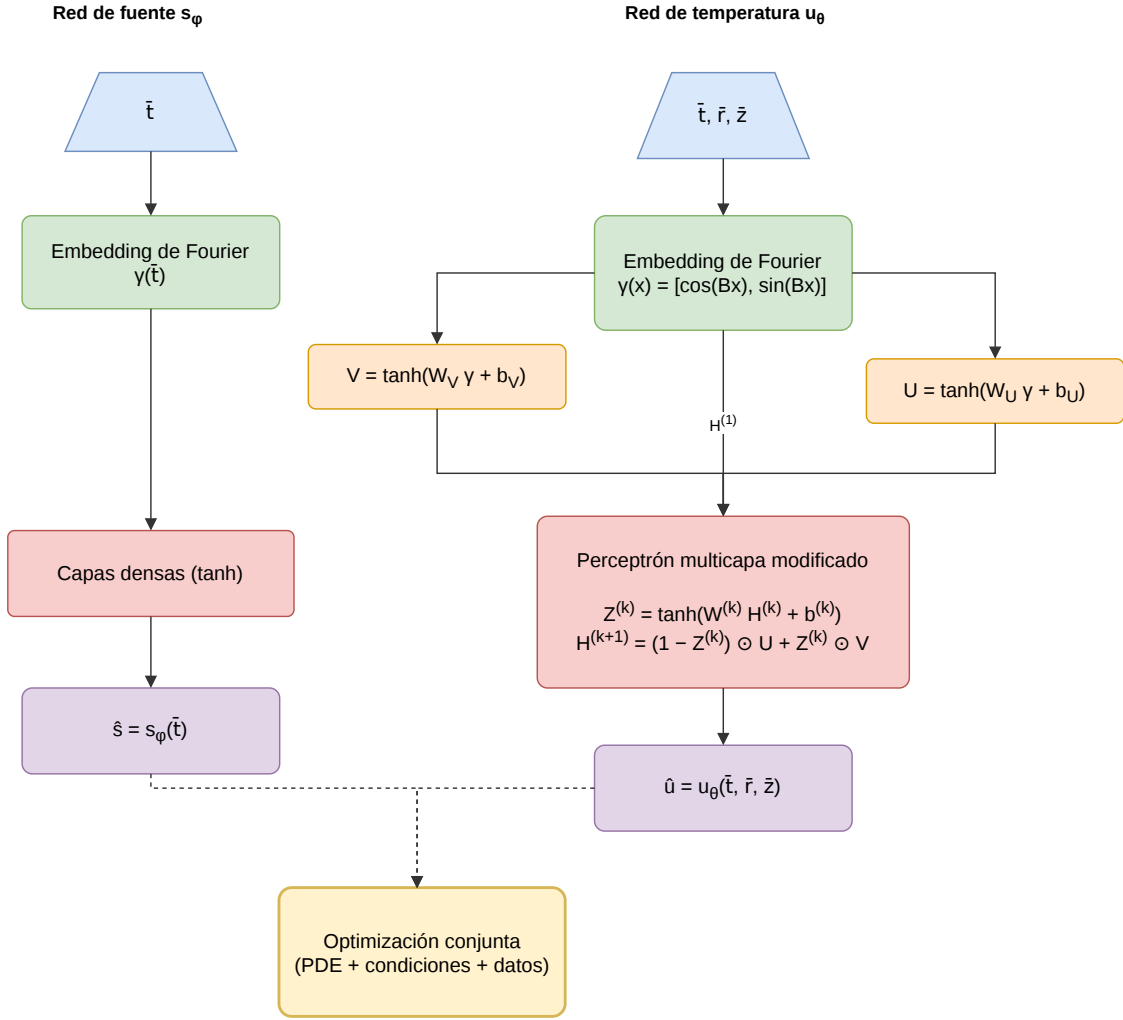


Figura 3.2: Arquitectura de la PINN con embedding de Fourier, perceptrón multicapa modificado y, en el problema inverso, red de fuente $s_\phi(\tilde{t})$ entrenada en conjunto con la red de temperatura u_θ . Fuente: Elaboración propia adaptado de (Wang, Teng & Perdikaris, 2020).

3.4. Función de pérdida

La formulación de la función de pérdida difiere entre el problema directo y el inverso, dado que cada uno impone restricciones distintas sobre las redes.

3.4.1. Formulación del problema directo

Cuando $\dot{Q}(t)$ es conocida y se busca el campo de temperatura, la función de pérdida combina los términos asociados a las restricciones físicas que la solución debe cumplir:

$$\mathcal{L}(\theta) = \lambda_r \mathcal{L}_r(\theta) + \lambda_{ic} \mathcal{L}_{ic}(\theta) + \lambda_{bc} \mathcal{L}_{bc}(\theta), \quad (3.8)$$

donde $\mathcal{L}_r$ es el error cuadrático medio del residual de la PDE (3.2) evaluado en los puntos de colocación interiores; $\mathcal{L}_{ic}$ impone la condición inicial; y $\mathcal{L}_{bc}$ agrupa las condiciones de borde sobre las superficies del calorímetro y la condición de simetría axial. La condición inicial puede imponerse de dos maneras. La primera es como término de penalización, sumando a la pérdida un término que castiga la desviación de θ respecto del valor inicial en $\bar{t} = 0$; en este caso la condición se satisface solo de forma aproximada, ya que compite con los demás términos de la pérdida. La segunda, empleada cuando la temperatura inicial adimensional es nula ($\theta_0 = 0$), la impone de forma exacta reparametrizando la salida de la red como

$$\theta(\bar{t}, \bar{r}, \bar{z}) = \bar{t} N_\theta(\bar{t}, \bar{r}, \bar{z}), \quad (3.9)$$

donde N_θ es la red sin restringir. Al evaluar en $\bar{t} = 0$, el factor $\bar{t}$ anula la salida con independencia de lo que prediga N_θ , de modo que $\theta(\bar{r}, \bar{z}, 0) = 0$ se cumple por construcción y el término de condición inicial desaparece de la función de pérdida. Esta imposición exacta evita además la singularidad inicial, esto es, la tensión que se produce en $\bar{t} = 0$ entre la condición inicial y las condiciones de borde, que coexisten en la misma esquina del dominio espacio-temporal y, bajo la imposición blanda, generan gradientes contrapuestos que dificultan la convergencia del transitorio.

3.4.2. Formulación del problema inverso

Cuando $\dot{Q}(t)$ es la incógnita, la información disponible incluye un conjunto de mediciones de temperatura en puntos sensorizados del dominio. A diferencia de algunas formulaciones que prescinden de las condiciones de borde y delegan toda la restricción a los datos, en este trabajo la pérdida inversa conserva la estructura física completa y añade el término de datos:

$$\mathcal{L}(\theta, \phi) = \lambda_d \mathcal{L}_d(\theta) + \lambda_r \mathcal{L}_r(\theta, \phi) + \lambda_{bc} \mathcal{L}_{bc}(\theta) + \lambda_{ic} \mathcal{L}_{ic}(\theta), \quad (3.10)$$

donde $\mathcal{L}_d$ es el error cuadrático medio entre la temperatura predicha por la red y los datos en los nodos sensorizados; $\mathcal{L}_r$ es el residual de la PDE, que ahora depende también de los parámetros ϕ de la red de fuente a través de $S(\bar{t}) = s_\phi(\bar{t})$; $\mathcal{L}_{bc}$ agrupa las condiciones de borde de Robin sobre la pared y las tapas, junto con la simetría axial; y $\mathcal{L}_{ic}$ impone la condición inicial.

En esta configuración de doble red, el balance entre el término de datos y el término físico es particularmente sensible: si λ_d es bajo, la red puede satisfacer la PDE con una fuente que no reproduce las mediciones; si es demasiado alto, la red ajusta los datos a costa de la consistencia física. Por esta razón, y a diferencia de la fase exploratoria, en la fase experimental los pesos de la pérdida no se actualizan de forma automática, sino que se fijan y se ajustan empíricamente para cada experimento.

3.4.3. Balanceo de pesos basado en NTK

En la fase exploratoria, donde las magnitudes de los distintos términos de pérdida pueden diferir en órdenes de magnitud, se utiliza un esquema de balanceo automático basado en el Neural Tangent Kernel (NTK). Este método actualiza periódicamente los pesos relativos de cada componente según las trazas de los kernels respectivos, de modo que las distintas componentes converjan a tasas comparables (Wang, Yu & Perdikaris, 2022). Este balanceo automático se reemplaza por pesos fijos ajustados manualmente en la fase experimental, por las razones expuestas en la Sección 3.4.2.

3.4.4. Entrenamiento causal en el tiempo

En ambas fases, el residual de la PDE se evalúa de manera temporalmente ordenada, descomponiendo el dominio en bloques sucesivos en $\bar{t}$ y ponderándolos de modo que la red minimice primero el error en los tiempos tempranos antes de atender los tardíos (Wang, Sankaran & Perdikaris, 2022). Esta estrategia respeta la naturaleza causal del problema térmico y previene que la red converja a soluciones que cumplen el residual en promedio pero violan la dirección temporal del fenómeno.

3.5. Muestreo de puntos de colocación

3.5.1. Distribución espacial

La estrategia de muestreo considera tres tipos de puntos sobre el dominio computacional. Los puntos interiores se distribuyen en el plano $(\bar{r}, \bar{z})$ y se utilizan para evaluar el residual de la ecuación de Fourier. Los puntos de frontera se ubican sobre las superficies del calorímetro y permiten imponer las condiciones de borde, ya sea Dirichlet o Robin según el experimento. Los puntos iniciales se sitúan en el plano $\bar{t} = 0$ y se emplean para imponer la condición inicial sobre todo el dominio espacial.

La distribución de estos puntos no es uniforme. Se emplea un muestreo híbrido que combina una componente uniforme sobre todo el dominio con una concentración adicional en las zonas cercanas a la pared lateral y a las tapas, donde se imponen las condiciones de borde y donde los gradientes térmicos son más pronunciados. Esta concentración local, implementada mediante perturbaciones gaussianas en torno a las superficies, mejora la representación del campo en las regiones de mayor variación sin incrementar de manera innecesaria el número total de puntos.

3.5.2. Distribución temporal

En el dominio temporal, la densidad de puntos se concentra en los transitorios tempranos del proceso, donde $\dot{Q}(t)$ es más activa y el campo de temperatura presenta mayor variación. En la fase experimental, esta concentración se realiza mediante un muestreo por importancia guiado por la magnitud de la tasa de variación temporal $|\partial T / \partial t|$ de los datos, combinado con una fracción uniforme que asegura cobertura de toda la cola del proceso. Esta distribución es además compatible con la estructura de bloques causales descrita previamente, ya que asegura que los bloques iniciales, que la red debe minimizar primero, dispongan de una cantidad suficiente de puntos para resolver con precisión la dinámica del transitorio.

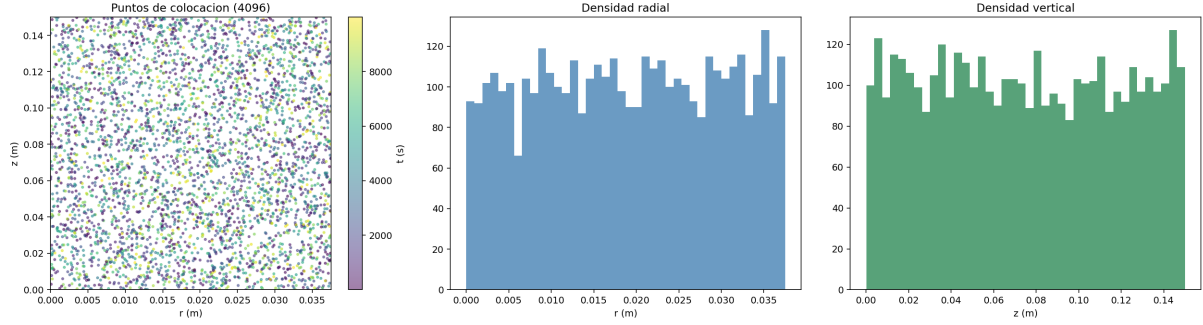


Figura 3.3: Distribución espacial, radial y temporal de los puntos de colocación utilizados durante el entrenamiento. Fuente: elaboración propia.

3.6. Referencias de validación: FEM y solución analítica

Para validar las predicciones de la PINN se emplean dos referencias independientes: una simulación numérica por el método de elementos finitos y una solución analítica cerrada de la ecuación de calor adimensional. Ambas ocupan el rol de referencia de validación del problema directo indicado en la Figura 1.2, y su carácter complementario es deliberado: el FEM es aplicable a todos los escenarios, incluidos aquellos sin solución cerrada, mientras que la solución analítica, disponible en un subconjunto de casos, proporciona un resultado exacto y libre de error de discretización contra el cual contrastar tanto al FEM como a la red.

El método de elementos finitos (FEM) resuelve la ecuación de calor de forma numérica discretizando el dominio de la probeta en una malla y aproximando el campo de temperatura sobre ella. A diferencia de la solución analítica, no impone restricciones sobre la forma de la fuente ni sobre el perfil de temperatura ambiente, por lo que constituye la referencia disponible en todos los experimentos, en particular en aquellos con temperatura ambiente variable en el tiempo, donde la solución analítica no es aplicable. Las simulaciones empleadas en este trabajo se implementaron en OpenSees/STKO por (Arrieta Costa, 2025) y el equipo de investigación. Su limitación es el error de discretización inherente al método, que depende del refinamiento de la malla, precisamente este error es el que la solución analítica permite acotar.

La solución analítica se obtiene por separación de variables sobre el problema axisimétrico

co con condiciones de borde de Robin. El campo de temperatura se expande en una serie de autofunciones cuya parte radial corresponde a funciones de Bessel de primera especie $J_0(\beta_n \bar{r})$, donde los autovalores β_n son las raíces de la condición de Robin radial $\beta_n J_1(\beta_n) = \text{Bi}_R J_0(\beta_n)$, y cuya parte axial corresponde a modos cosenoidales centrados en la mitad de la altura, con autovalores γ_m dados por $\gamma_m \tan(\gamma_m/2) = \text{Bi}_H$. La condición inicial y el aporte de la fuente $S(\bar{t})$, supuesta uniforme en el espacio, se proyectan sobre esta base; la evolución temporal de cada modo se resuelve mediante una integral de convolución de tipo Duhamel, con un decaimiento exponencial gobernado por $\exp[-(\text{Fo}_R \beta_n^2 + \text{Fo}_H \gamma_m^2) \bar{t}]$. La serie se trunca a un número finito de modos suficiente para alcanzar la convergencia.

Esta solución analítica se deriva para el caso de temperatura ambiente constante en la condición de Robin y, en consecuencia, se utiliza como referencia exacta en dichos escenarios; en los experimentos con temperatura ambiente variable en el tiempo, la referencia de validación es la simulación de elementos finitos. La derivación completa de la solución se presenta en el Anexo B.

3.7. Implementación y entrenamiento

3.7.1. Adimensionalización y escalado

Como se describió en la Sección 3.1.2, el dominio temporal se adimensionaliza al intervalo $[0, 1]$ y la salida de la red (temperatura) se escala a valores de orden unitario. Esto permite que la red opere con magnitudes comparables en todas sus entradas y salidas, estabilizando los gradientes durante el entrenamiento. En la fase experimental, el factor de escala de temperatura se adapta automáticamente al rango térmico observado en los datos de cada experimento. El horizonte temporal $T_{\max}$ se fija en cada experimento según la escala temporal de la fuente de referencia, lo que determina la adimensionalización del tiempo.

3.7.2. Optimizador y schedule de learning rate

El entrenamiento se realiza con el optimizador Adam con un learning rate sujeto a decaimiento exponencial. Esta configuración constituye la base del proyecto; para cada

experimento, los hiperparámetros se ajustan según las características del caso, y en algunos experimentos se incorporan u omiten componentes específicos cuando el problema lo justifica, lo que se documenta en cada caso.

3.7.3. Validación interna y criterio de parada

En la fase experimental, una fracción de los pares (sensor, tiempo) se aparta como conjunto de validación temporal held-out, ajeno al entrenamiento, para estimar de manera honesta la capacidad de generalización de la red. Además, cuando el experimento emplea menos que la totalidad de los nodos como sensores, los nodos no utilizados constituyen un conjunto held-out espacial que permite evaluar si la red reconstruye el campo de temperatura en puntos donde no dispuso de datos. Ambos conjuntos se emplean como diagnóstico de sobreajuste en el Capítulo 4.

El entrenamiento incorpora un criterio de parada temprana que detiene la optimización cuando la pérdida de validación deja de mejorar, tras un periodo inicial de calentamiento durante el cual no se selecciona ningún modelo, lo que evita la selección en las primeras iteraciones del entrenamiento.

3.7.4. Hiperparámetros base

Los hiperparámetros configurados para cada experimento se resumen en la Tabla 3.1, que incluye la profundidad y ancho de las redes, la escala del embedding de Fourier, el número de bloques causales, los factores de escalado, el learning rate inicial y el número de pasos de entrenamiento.

Hiperparámetro	Red de campo (temp.)	Red de fuente ($\dot{Q}$)
Capas ocultas	6	4
Neuronas por capa	256	64
Dimensión del embedding de Fourier	64	32
Escala del embedding de Fourier	1,0	5,0
Bloques causales	32	
Learning rate inicial	5×10^{-4}	
Decaimiento del learning rate	exponencial ($\times 0,9$ cada 8 000 pasos)	
Pasos de entrenamiento	40 000	
Escala temporal del campo (t_{scale})	automática: $\min(\max(2,6 \Delta T, 5), 50)$	
Escala de la fuente (s_{scale})	automática (estimada del dato)	

Tabla 3.1: Resumen de los hiperparámetros base configurados para los experimentos. Fuente: elaboración propia.

3.8. Validación y métricas de error

3.8.1. Referencias de validación

La validación se realiza por comparación contra dos referencias: las simulaciones de elementos finitos implementadas en OpenSees/STKO (Arrieta Costa, 2025) y la solución analítica de la Sección 3.6. Para los casos directos bajo condición de Robin con ambiente constante se compara nodo a nodo el campo T_{PINN} contra ambas referencias; los casos bajo condición de Dirichlet, para los que no aplica la solución analítica, se contrastan únicamente contra el FEM. Para los casos inversos, además de la temperatura, se compara la curva $\dot{Q}(t)$ recuperada por la red contra la curva de referencia usada como ground truth. Estas referencias son las que aparecen como solución analítica y FEM en la Figura 1.2, y permiten validar la PINN antes de aplicarla a la identificación inversa de $\dot{Q}(t)$.

3.8.2. Métricas cuantitativas

La evaluación cuantitativa apunta a aspectos complementarios del desempeño de la red: la exactitud del campo de temperatura predicho, la calidad de la fuente recuperada en el problema inverso y el grado de cumplimiento físico de la solución.

- **Error L^2 relativo sobre el campo de temperatura.** Definido como el RMSE

del campo expresado como fracción del rango térmico de cada caso, $\text{RMSE}/\Delta T$ con ΔT el rango de temperatura observado, constituye la métrica global de exactitud. Al expresarse como fracción del rango térmico, permite contrastar directamente experimentos con escalas distintas.

- **Error máximo puntual.** Definido como $\max_i |T_{\text{PINN}}(\mathbf{x}_i) - T_{\text{ref}}(\mathbf{x}_i)|$, complementa la métrica anterior identificando el peor desajuste local del campo, típicamente cercano a la frontera o al transitorio inicial donde los gradientes son más pronunciados.
- **Coeficiente de determinación R^2 .** Se reporta tanto para el campo T como para la fuente $\dot{Q}$ y mide qué fracción de la varianza de la señal de referencia es explicada por la predicción de la red. A diferencia del error L^2 , R^2 es sensible a la forma de la curva más que a su escala absoluta, por lo que resulta particularmente informativo para verificar si la red ha capturado la morfología de $\dot{Q}(t)$.
- **Error de energía.** Evalúa específicamente la calidad de la fuente recuperada, como la diferencia relativa entre la energía total liberada por la fuente predicha y la de la fuente de referencia, $|\int_0^{T_{\text{max}}} \dot{Q}_{\text{PINN}} dt - \int_0^{T_{\text{max}}} \dot{Q}_{\text{ref}} dt| / \int_0^{T_{\text{max}}} \dot{Q}_{\text{ref}} dt$. Es relevante porque la energía total integrada se corresponde con el calor de hidratación total liberado por la mezcla; una buena reconstrucción debe preservar este valor aun cuando la curva instantánea presente desviaciones locales.
- **Error en el valor máximo de la fuente.** Cuantifica la diferencia relativa entre el pico de la fuente recuperada y el de la fuente de referencia, complementando el error de energía con una medida sobre la amplitud máxima del fenómeno.
- **Residual de la PDE.** Se evalúa sobre una grilla de validación independiente de los puntos de entrenamiento. No compara contra una solución de referencia, sino que mide directamente el grado en que la red satisface la ecuación de Fourier en puntos no vistos durante la optimización, lo que permite detectar el sobreajuste a los puntos de colocación.
- **Tiempo a solución.** Tiempo de cómputo total del entrenamiento de cada experimento, medido en segundos sobre la GPU empleada. Aunque no constituye un

error de aproximación, es la métrica determinante para justificar el uso de PINNs en este problema: el costo de la identificación inversa debe ser competitivo frente al de los métodos de referencia para que el enfoque resulte practicable. Se reporta junto con el hardware utilizado, lo que permite contrastar el costo computacional contra el de la simulación de elementos finitos, ejecutada en CPU, teniendo presente que la diferencia de plataforma (GPU frente a CPU) impide una comparación directa y obliga a interpretar los tiempos como órdenes de magnitud antes que como cifras estrictamente equiparables.

3.8.3. Diagnósticos de generalización y robustez

Además de las métricas de exactitud, se emplean diagnósticos que permiten distinguir una reconstrucción genuina de un sobreajuste a los datos.

- **RMSE en nodos held-out y gap sensor/held-out.** Cuando el experimento usa menos que la totalidad de los nodos como sensores, se compara el RMSE en los nodos sensorizados con el de los nodos no utilizados (held-out). Su cociente, el gap sensor/held-out, crece por encima de la unidad cuando la red ajusta el ruido en los sensores en lugar de reconstruir el campo.
- **Gap validación/entrenamiento.** Razón entre el error sobre el conjunto de validación temporal held-out y el de entrenamiento. Un valor cercano a uno indica ausencia de sobreajuste temporal.
- **Fuga de ruido.** Definida como el cociente entre el RMSE del campo y la desviación estándar del ruido inyectado, mide qué fracción del ruido la red ajusta en lugar de rechazar. Su complemento expresa la capacidad de filtrado del residual de la PDE.

Capítulo 4

Resultados y Análisis

Este capítulo presenta y analiza los resultados obtenidos, organizados según las dos fases de la investigación definidas en el Capítulo 3. La fase exploratoria (Sección 4.2) reúne la validación de la tecnología sobre los subproblemas de complejidad creciente, contrastando el campo de temperatura predicho por la PINN contra las simulaciones de elementos finitos (FEM) de referencia. La fase experimental (Sección 4.3) presenta la identificación inversa de la curva de generación de calor $\dot{Q}(t)$ bajo condición de borde de Robin, y analiza el efecto de distintos factores controlados sobre la calidad de la reconstrucción. Las métricas empleadas a lo largo del capítulo se definieron en la Sección 3.8.2.

La Figura 4.1 resume el conjunto completo de experimentos presentados en este capítulo y el orden en que se exponen. Dentro de la fase exploratoria, los tres hitos se recorren de forma incremental: la validación del problema directo bajo condición de Dirichlet (Sección 4.2.1), su contraparte bajo condición de Robin (Sección 4.2.2) y, finalmente, la validación de la maquinaria de inversión sobre un caso controlado bajo Dirichlet (Sección 4.2.3). En la fase experimental, todos los estudios comparten la configuración objetivo, condición de Robin y problema inverso, y se organizan a partir de un caso base de referencia (Sección 4.3.1) sobre el cual se evalúa, de forma aislada, el efecto de la cobertura de sensores y el nivel de ruido (Sección 4.3.2), del perfil de temperatura ambiente (Sección 4.3.3) y de la morfología de la fuente (Sección 4.3.4), para concluir con el estudio de ablación de arquitectura (Sección 4.3.5) y la evaluación de la red reducida (Sección 4.3.7). El detalle numérico completo de las 111 corridas que componen la campaña experimental se reporta en el Anexo D.2, Tabla D.10.

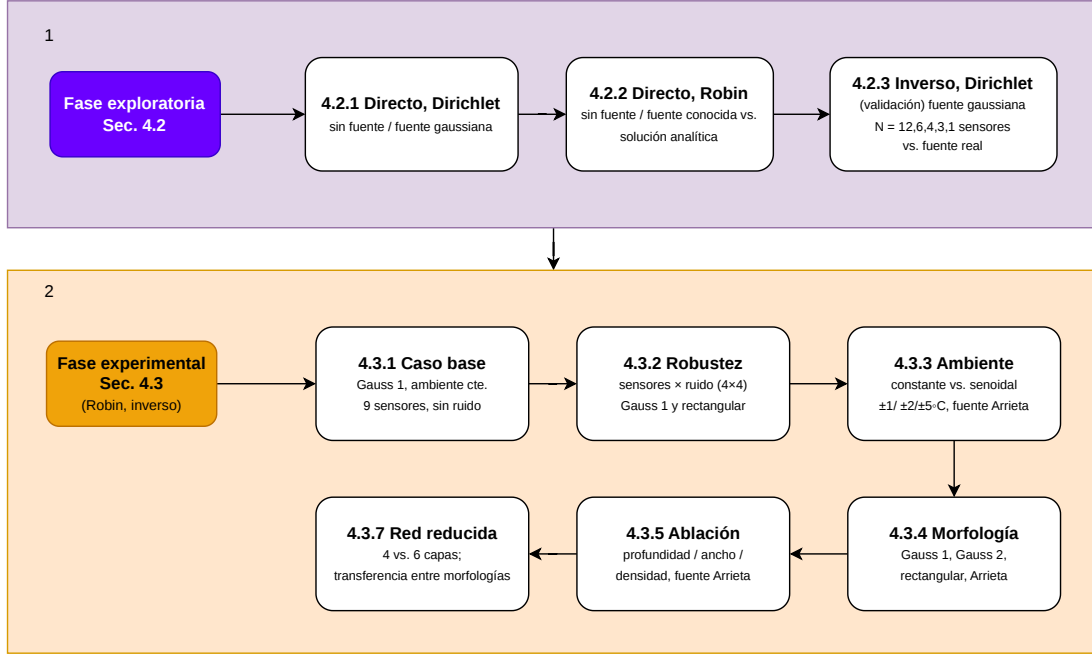


Figura 4.1: Diagrama del plan de experimentos presentados en este capítulo, organizado según las dos fases de la investigación. La fase exploratoria 1 (Sección 4.2) recorre tres hitos de validación incremental; la fase experimental 2 (Sección 4.3) parte de un caso base bajo condición de Robin y evalúa de forma aislada el efecto de la cobertura de sensores, el ruido, el perfil de temperatura ambiente, la morfología de la fuente y la arquitectura de la red. El detalle numérico completo de las 111 corridas se reporta en el Anexo D.2, Tabla D.10. Fuente: elaboración propia.

4.1. Configuración de la evaluación

Los resultados se evalúan contra dos referencias. La primera son las simulaciones de elementos finitos desarrolladas en OpenSees/STKO, facilitadas por el equipo de investigación, que se utilizan como referencia en ambas fases. La segunda es la solución analítica por expansión en autofunciones, empleada únicamente en la fase experimental como una tercera curva de comparación frente a FEM y PINN; esta solución es válida solo para los casos con temperatura ambiente constante, dado que el método de autofunciones no admite una temperatura exterior variable en el tiempo. La derivación completa de la solución analítica se presenta en el Anexo B.

La fase experimental se compone de un conjunto de experimentos identificados con la convención eN , donde N es el número de experimento. Cada experimento corresponde a

una combinación específica de perfil de fuente, perfil de temperatura ambiente, número de sensores y nivel de ruido; el plan completo de experimentos se detalla en el Anexo D. A lo largo de la Sección 4.3, los barridos sobre cada factor se interpretan respecto de un *caso base de referencia* (Sección 4.3.1), de modo que el efecto de cada factor pueda atribuirse de forma aislada.

4.2. Fase exploratoria

Esta fase reúne la validación incremental de la metodología sobre los subproblemas de complejidad creciente descritos en la Sección 3.2.1. Para cada hito se reporta la convergencia del entrenamiento, la exactitud del campo de temperatura frente a la referencia FEM y los hallazgos prácticos que surgieron, los cuales orientaron las decisiones de diseño aplicadas en la fase experimental. En términos de la Figura 1.2, esta fase cubre la rama del problema directo, donde la PINN se contrasta contra las referencias de validación antes de abordar la identificación inversa.

4.2.1. Problema directo con condición de Dirichlet

El primer hito de la fase exploratoria valida la implementación base del esquema bajo condición de borde de Dirichlet, en dos escenarios de complejidad creciente: un problema de difusión pura, sin fuente interna, y un problema con una fuente gaussiana conocida. En ambos casos las superficies del calorímetro se fijan a la temperatura ambiente $T_{\text{env}} = 20^\circ\text{C}$ y la probeta parte de $T_0 = 0^\circ\text{C}$. La Tabla 4.1 resume las métricas agregadas frente a la referencia FEM y la Figura 4.2 compara, en nodos representativos, la predicción de la PINN con el FEM.

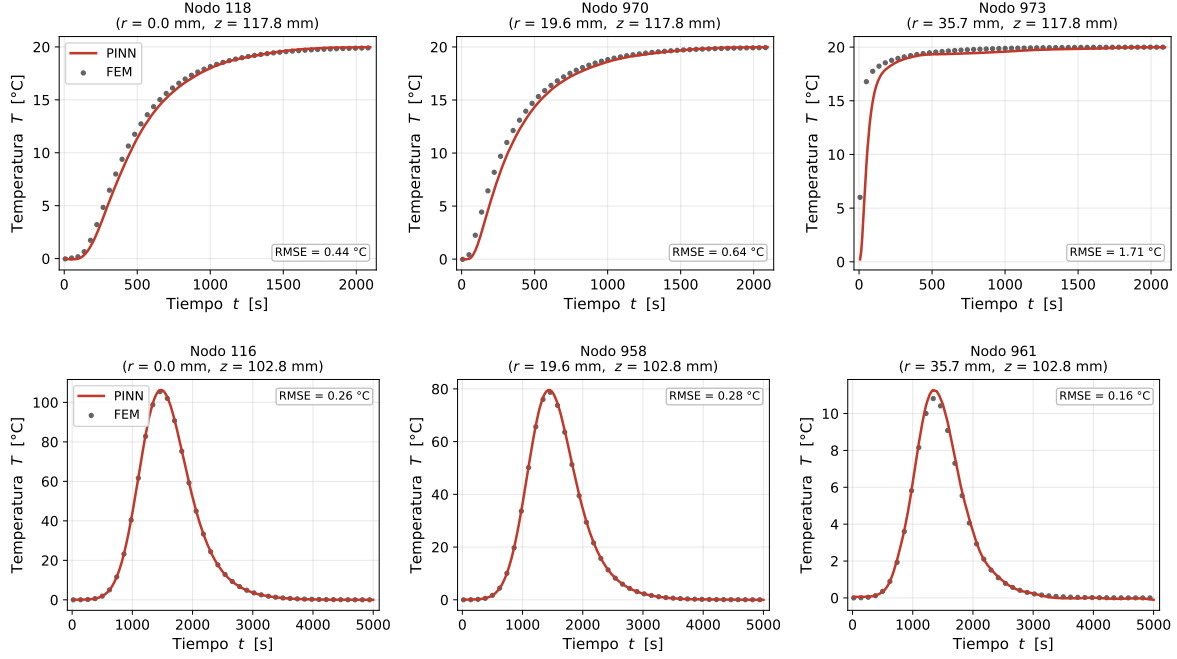


Figura 4.2: Comparación de la temperatura predicha por la PINN (línea) y la referencia FEM (puntos) en nodos representativos, desde el eje hacia la pared. (Arriba) problema de difusión pura sin fuente; (abajo) problema con fuente gaussiana conocida. Fuente: elaboración propia.

Métrica	Dirichlet, sin fuente	Dirichlet, fuente gaussiana
L^2 rel. [%]	5.52	0.20
RMSE [°C]	1.10	0.22
Máx. puntual [°C]	14.30	0.85
R^2 prom.	0.21	0.998
Δ pico medio [°C]	0.05	0.56

Tabla 4.1: Métricas del campo de temperatura para los casos directos con condición de Dirichlet (PINN vs FEM). El error L^2 relativo se calcula respecto del rango térmico de cada caso.

En el caso de difusión pura, el campo predicho reproduce correctamente la forma global del calentamiento y su valor asintótico: el error medio en el valor máximo es de apenas 0,05 °C y el RMSE global es de 1,10 °C, equivalente a un 5,52 % del rango térmico. No obstante, el coeficiente de determinación promedio es bajo ($R^2 \approx 0,21$) y llega a ser negativo en los nodos cercanos a la pared. Dos factores explican este contraste. Primero, el error se concentra fuertemente en la región próxima a la pared: el RMSE promedio crece desde 0,55 °C en el centro hasta 1,39 °C en la pared, donde el calentamiento

impuesto por la condición de borde es prácticamente instantáneo y la red, en su versión más simple, suaviza ese frente abrupto. Segundo, el R^2 es una métrica severa en este escenario: como la señal de referencia satura rápidamente a un valor casi constante de 20 °C, su varianza es pequeña y un desfase menor en el frente inicial basta para producir valores negativos, aun cuando el error absoluto sea moderado. En conjunto, este caso valida cualitativamente el esquema base, la imposición de la condición inicial, de la condición de borde y la dinámica difusiva, que era el objetivo de este primer hito.

Al incorporar una fuente gaussiana conocida, el desempeño mejora de forma marcada. El transitorio deja de estar dominado por un frente de borde abrupto y pasa a tener forma de campana, con un máximo cercano a los 107 °C en el eje. En este escenario la red captura la curva completa, ascenso, pico y decaimiento, con alta fidelidad: el RMSE global es de 0,22 °C (0,20 % del rango térmico) y el R^2 promedio alcanza 0,998. Se observa una leve sobreestimación sistemática del pico (del orden de 0,56 °C, menos del 0,8 % del valor máximo), consistente con un sesgo positivo pequeño en la distribución del error. A diferencia del caso anterior, el error se distribuye de manera relativamente uniforme y es incluso menor en la pared. Este resultado valida la capacidad de la red para representar el efecto de un término de generación interno activo, que es el modo de uso relevante para el problema objetivo.

La lectura conjunta de ambos casos es la que orienta el resto del trabajo: el régimen físicamente relevante, un transitorio suave inducido por una fuente, análogo al calor de hidratación, se reproduce con exactitud, mientras que la única dificultad observada, un frente de borde casi instantáneo en ausencia de fuente, corresponde a un régimen menos representativo y penalizado por la métrica. Validado el esquema base bajo Dirichlet, la metodología se traslada a la condición de borde de Robin en la Sección 4.2.2.

4.2.2. Problema directo con condición de Robin

El segundo hito reproduce la progresión anterior, ahora bajo la condición de borde de Robin, que modela el intercambio convectivo $-k \nabla T \cdot n = \beta (T - T_{\text{env}})$ y constituye el comportamiento físicamente realista del calorímetro. Se consideran de nuevo dos casos: un problema sin fuente interna, en el que la probeta parte de 0 °C y se equilibra con el ambiente, y un problema con una fuente conocida bajo ambiente constante a 20 °C. En esta subsección la referencia de validación es la solución analítica exacta descrita en la

Sección 3.6, que al prescindir de la malla evita el error de discretización. La Tabla 4.2 resume las métricas y la Figura 4.3 compara, en nodos representativos, la predicción de la PINN con la solución analítica.

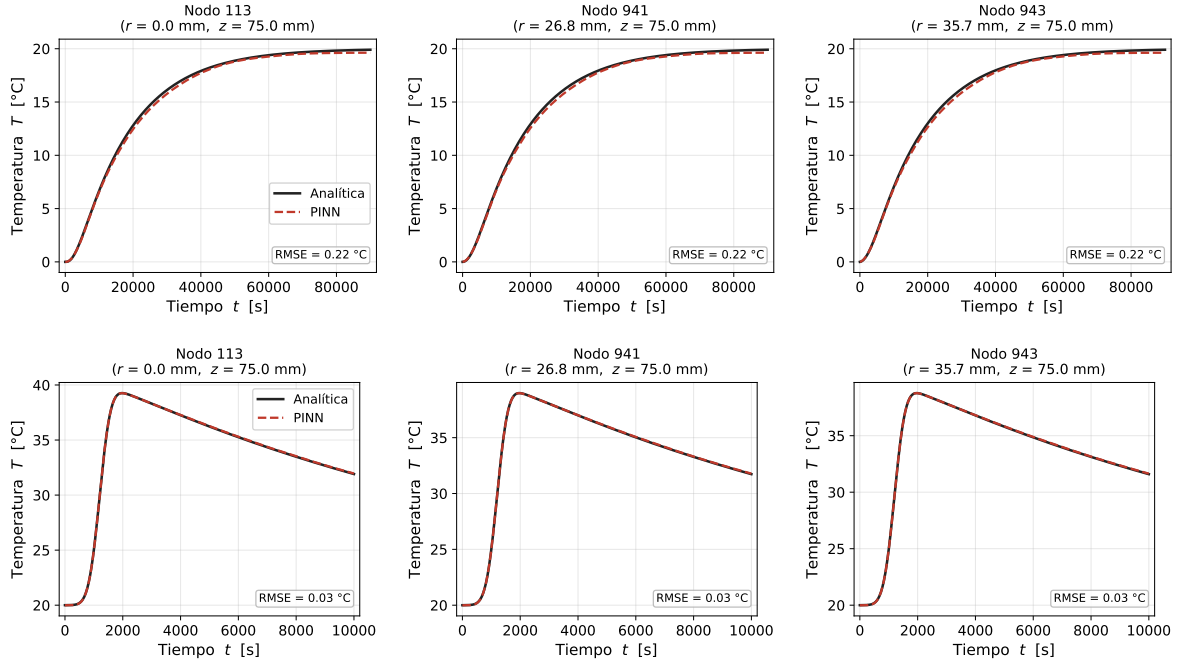


Figura 4.3: Comparación de la temperatura predicha por la PINN (línea discontinua) y la solución analítica (línea continua) en nodos representativos, desde el eje hacia la pared. (Arriba) problema sin fuente, con equilibración convectiva hacia el ambiente; (abajo) problema con fuente conocida bajo ambiente constante. Fuente: elaboración propia.

Métrica	Robin, sin fuente	Robin, con fuente
L^2 rel. [%]	1.08	0.04
RMSE [°C]	0.215	0.008
Máx. puntual [°C]	0.37	0.027
R^2 prom.	0.998	1.000
Δ pico medio [°C]	0.27	0.009

Tabla 4.2: Métricas del campo de temperatura para los casos directos con condición de Robin (PINN vs solución analítica). El error L^2 relativo se calcula respecto del rango térmico de cada caso.

En el caso sin fuente, la red reproduce con alta fidelidad la equilibración convectiva de la probeta hacia el ambiente: el RMSE global es de 0,215 °C (1,08 % del rango térmico) y el R^2 promedio alcanza 0,998. A diferencia de lo observado bajo Dirichlet, el error

es prácticamente uniforme en todo el dominio: el RMSE varía solo entre $0,214\text{ }^{\circ}\text{C}$ en el centro y $0,216\text{ }^{\circ}\text{C}$ en la pared, sin la concentración cercana a la frontera que penalizaba el caso anterior. Este contraste tiene una explicación física: la condición de Robin produce un calentamiento gradual y suave, con una constante de tiempo del orden de $2,1 \times 10^4\text{ s}$, en lugar del frente casi instantáneo que imponía la condición de Dirichlet, de modo que la red no debe resolver ningún gradiente abrupto. En consecuencia, la condición de borde físicamente realista resulta, en este escenario, más sencilla de capturar que la idealización de Dirichlet. La única desviación apreciable es una leve subestimación uniforme del valor de equilibrio (del orden de $0,27\text{ }^{\circ}\text{C}$, con la red estabilizándose en torno a $19,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ frente a los $19,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ de la referencia). El comportamiento dinámico también se recupera: la constante de tiempo efectiva ajustada en el centro es de $21\,789\text{ s}$ para la PINN frente a $21\,279\text{ s}$ de la solución analítica, una diferencia del orden del 2% , lo que confirma que la red captura la velocidad del transitorio y no solo su valor final.

Al incorporar una fuente conocida bajo ambiente constante, la concordancia es prácticamente exacta. El transitorio en forma de campana, con un máximo cercano a los $39\text{ }^{\circ}\text{C}$, se reproduce con un RMSE global de $0,008\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($0,04\%$ del rango térmico), un R^2 promedio de $0,99999$ y un error medio en el pico de apenas $0,009\text{ }^{\circ}\text{C}$. La distribución espacial del error es nuevamente uniforme. Este resultado representa el mejor acuerdo de toda la fase exploratoria y valida tanto la imposición estable de la condición de Robin como la representación del efecto de una fuente activa bajo dicha condición.

En conjunto, este segundo hito confirma que la condición de borde convectiva se impone de forma estable en ambos regímenes, la equilibración lenta con el ambiente y el transitorio inducido por una fuente, y que el acople adicional entre la solución interior y el flujo en el borde no compromete la convergencia. Validada la formulación directa bajo Robin, la metodología cuenta con todos los ingredientes del problema objetivo y puede abordar la inversión, que se valida en la Sección 4.2.3.

4.2.3. Problema inverso de validación

El último hito de la fase exploratoria valida la maquinaria de inversión completa antes de aplicarla al problema objetivo. La inversión se realiza aquí bajo condición de Dirichlet de forma deliberada: ello permite aislar las dificultades propias del problema inverso, la identificabilidad de la fuente y el balance entre los términos de datos y de física,

sin acoplarlas a la condición de borde convectiva, cuyo tratamiento ya quedó validado en la Sección 4.2.2. El problema inverso bajo Robin, que combina ambos elementos, constituye precisamente el objeto de la fase experimental (Sección 4.3).

El experimento emplea una fuente gaussiana conocida como ground truth. Es importante subrayar que esta fuente nunca aparece en la función de pérdida: la red solo dispone de las mediciones de temperatura en un conjunto de nodos sensorizados, y la curva de fuente se reconstruye de forma indirecta a partir de ellas. La fuente de referencia funciona, por tanto, como un objetivo *ciego* que solo se utiliza a posteriori para evaluar la calidad de la reconstrucción. Para caracterizar la robustez de la inversión se repite el experimento reduciendo progresivamente el número de sensores ($N = 12, 6, 4, 3, 1$); la Tabla 4.3 resume los resultados.

N sensores	12	6	4	3	1
$R^2(\hat{Q})$	0.9997	0.9998	0.9994	0.9995	0.7506
Err. energía [%]	1.78	0.92	0.10	1.18	41.20
Err. pico [%]	1.48	0.60	1.45	1.19	46.00
RMSE sensores [°C]	0.022	0.024	0.022	0.032	0.024
RMSE held-out [°C]	—	0.494	0.486	0.385	8.543

Tabla 4.3: Identificación inversa de la fuente bajo Dirichlet en función del número de sensores. La fila held-out reporta el RMSE en los nodos no utilizados como datos de entrenamiento; el símbolo — indica que no hay nodos held-out porque la totalidad de ellos se usó como sensores.

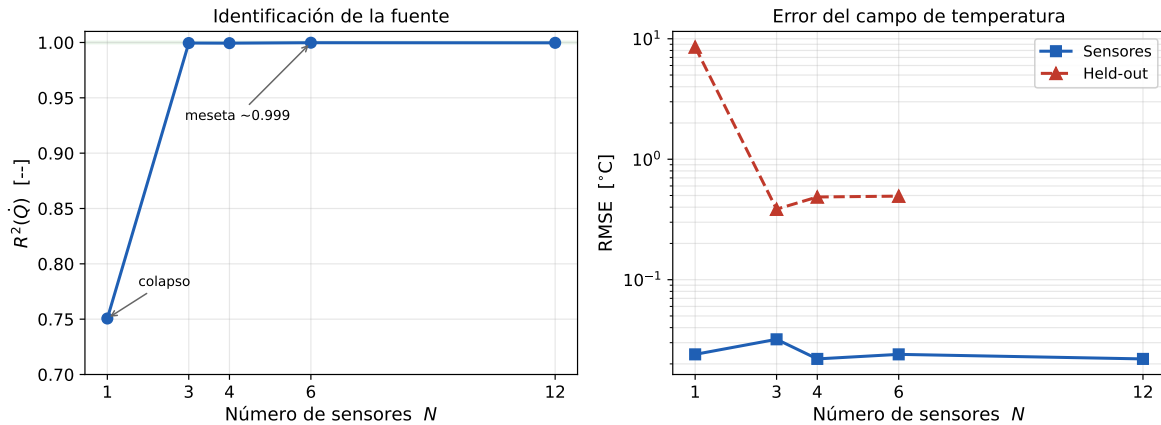


Figura 4.4: (Izquierda) coeficiente de determinación de la fuente recuperada, objetivo ciego, en función del número de sensores: meseta en torno a 0,999 desde $N = 12$ hasta $N = 3$ y colapso en $N = 1$. (Derecha) RMSE del campo de temperatura en los nodos sensorizados y en los nodos held-out frente al número de sensores. Fuente: elaboración propia.

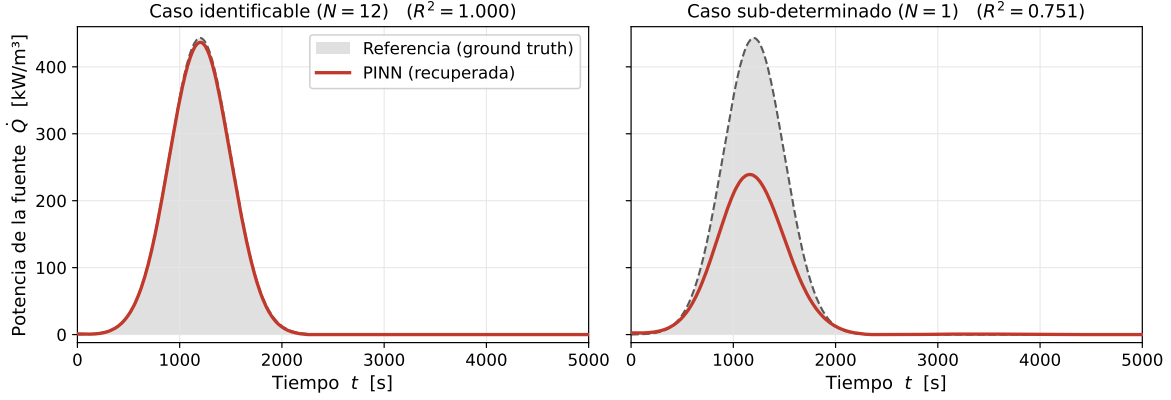


Figura 4.5: Fuente recuperada por la PINN (línea) frente a la fuente de referencia (sombreado). (Izquierda) caso identificable $N = 12$, con la curva reconstruida prácticamente superpuesta a la real; (derecha) caso $N = 1$, en el que la fuente subestima la amplitud por falta de información. Fuente: elaboración propia.

En el rango de $N = 12$ a $N = 3$, la fuente reconstruida reproduce la curva de referencia con un R^2 que se mantiene en una meseta entre 0,9994 y 0,9998 (Figura 4.4, izquierda), con errores de energía total y de valor máximo del orden del 1 %. Las curvas recuperadas para los distintos números de sensores son prácticamente indistinguibles entre sí. Este comportamiento es relevante de cara a una posible sospecha de sobreajuste: si la inversión estuviese sobreajustando los datos, reducir el número de sensores, es decir, la cantidad de información disponible, degradaría progresivamente la reconstrucción del objetivo ciego. Lo que se observa, en cambio, es una meseta seguida de un precipicio: la calidad se conserva intacta al reducir los sensores hasta $N = 3$ y solo se desploma en $N = 1$. Esta forma, meseta y luego caída abrupta, es la firma de un umbral de identificabilidad, por debajo de cierta información mínima el problema deja de estar determinado, y no la de una degradación gradual por sobreajuste.

La segunda red, la del campo de temperatura, podría en principio limitarse a memorizar los valores medidos en los sensores sin reconstruir el campo en el resto del dominio. Para descartarlo se compara el error en los nodos sensorizados con el error en los nodos held-out, que nunca intervinieron en el entrenamiento. En el rango identificable ($N = 6, 4, 3$), el RMSE en los nodos held-out se mantiene por debajo de $0,5^\circ\text{C}$, esto es, menos del 0,5 % del rango térmico de referencia ($107,5^\circ\text{C}$). Es cierto que el cociente entre el error en held-out y en sensores es elevado (del orden de 20 veces), pero ese cociente solo refleja que la red ajusta los sensores con un detalle mayor; lo determinante es que el

error absoluto en los nodos no vistos es pequeño, lo que indica que la red reconstruye el campo en lugar de memorizar puntos aislados. Esta conclusión se refuerza con el residual de la ecuación evaluado sobre una grilla fresca, independiente de los puntos de entrenamiento, que se mantiene bajo y uniforme (RMS entre 0,22 y 0,36): la red satisface la física también allí donde nunca tuvo datos.

El caso de un único sensor se aparta nítidamente del resto: el R^2 de la fuente cae a 0,75, la energía total se subestima en un 41 % y el valor máximo en un 46 % (Figura 4.5, derecha), y el campo en los nodos held-out se reconstruye a aproximadamente la mitad de la amplitud real. Conviene precisar por qué esto no contradice el argumento anterior. La red sigue ajustando su único sensor con un RMSE pequeño (0,024 °C); lo que falla es todo lo demás. Esa combinación, ajuste correcto del dato disponible junto con un colapso simultáneo de la fuente y del campo, es característica de un problema sub-determinado: con una sola medición, situada además en un nodo de baja amplitud, la información es insuficiente para fijar de manera unívoca la amplitud de la fuente, de modo que la red converge a una solución consistente con el dato pero distinta de la real. Se trata de una limitación de identificabilidad, por falta de datos, y no de un sobreajuste en el sentido de memorizar la información disponible a costa de la capacidad de generalizar.

En conjunto, el experimento valida la inversión en sus dos componentes: la fuente se recupera de manera robusta y sin sobreajuste mientras el problema esté determinado, y el campo de temperatura generaliza a nodos no vistos satisfaciendo la ecuación en todo el dominio. El único límite observado es de naturaleza física, la sub-determinación cuando la cobertura de sensores es insuficiente, y no un defecto del método. Con esto concluye la validación exploratoria, cuyos hallazgos se sintetizan en la Sección 4.2.4 antes de abordar la fase experimental.

4.2.4. Síntesis de la fase exploratoria

La fase exploratoria recorrió de forma incremental los tres hitos que componen el problema objetivo: la imposición de la condición de borde (Dirichlet en la Sección 4.2.1 y Robin en la Sección 4.2.2), la representación del transitorio inducido por una fuente activa y, finalmente, la identificación inversa de esa fuente a partir de mediciones (Sección 4.2.3). El balance del recorrido es favorable: en el régimen físicamente relevante,

esto es, un transitorio suave gobernado por una fuente interna bajo intercambio convectivo, la metodología reproduce el campo de temperatura con errores muy por debajo del 1 % del rango térmico y recupera la fuente con un R^2 por encima de 0,999 siempre que la cobertura de sensores supere el umbral de identificabilidad.

Dos resultados son particularmente relevantes para la fase siguiente. Primero, la condición de Robin, que es la físicamente realista, no solo se impone de forma estable, sino que resultó más sencilla de capturar que la idealización de Dirichlet, al sustituir el frente de borde casi instantáneo por un calentamiento gradual sin gradientes abruptos (Sección 4.2.2). La única dificultad observada en toda la fase, el suavizado de un frente instantáneo en ausencia de fuente bajo Dirichlet, corresponde a un régimen que no aparece en el problema objetivo, por lo que no condiciona la fase experimental. Segundo, la validación inversa (Sección 4.2.3) mostró que la recuperación de la fuente es robusta y no obedece a un sobreajuste: la calidad se mantiene en una meseta al reducir los sensores y solo colapsa cuando el problema queda sub-determinado, mientras que el campo de temperatura generaliza a nodos no vistos satisfaciendo la ecuación sobre grillas independientes de los puntos de entrenamiento.

Estos hallazgos confirman que los ingredientes metodológicos empleados, esto es, el embedding de características de Fourier, el entrenamiento causal en el tiempo y la configuración de doble red para el problema inverso, bastan para resolver de forma estable, por separado, cada una de las dificultades del problema objetivo. Asimismo, el esquema de validación held-out, ejercitado en la Sección 4.2.3, se adopta como diagnóstico estándar de generalización en la fase experimental, donde permite distinguir una reconstrucción genuina de una mera memorización de los sensores.

Con esto, cada componente del problema objetivo, la imposición de la condición de Robin y la maquinaria de inversión, ha sido validado de manera aislada contra una referencia exacta o de elementos finitos, pero nunca en conjunto. La fase experimental aborda precisamente esa combinación, el problema inverso bajo condición de Robin, sobre la que descansan las conclusiones del trabajo. Habiendo verificado que ninguna de las dos dificultades, por separado, compromete la convergencia, esta validación previa permite atribuir cualquier degradación observada en la fase experimental a los factores controlados que se barren (la morfología de la fuente, el perfil de temperatura ambiente, la cobertura de sensores y el nivel de ruido) y no a un fallo de base de la metodología, lo

que habilita avanzar hacia la identificación inversa bajo Robin sobre una base confiable.

4.3. Fase experimental: identificación inversa bajo Robin

Esta sección presenta los resultados de la identificación inversa de $\dot{Q}(t)$ bajo condición de Robin. Aquí se aborda el objetivo central señalado en la Figura 1.2: la recuperación de la fuente $\dot{Q}(t)$ a partir de los datos de los sensores bajo condición de borde de Robin, esto es, el caso real del problema inverso. Se parte de un caso base de referencia (Sección 4.3.1) y, a continuación, se estudia el efecto de la morfología de la fuente (Sección 4.3.4), la robustez conjunta frente a la cobertura de sensores y al nivel de ruido (Sección 4.3.2) y el perfil de temperatura ambiente (Sección 4.3.3). Finalmente, la Sección 4.3.5 examina la dificultad asociada a la escala temporal de la curva de Arrieta y los ajustes de muestreo y arquitectura que motivó, identificada como una limitación del enfoque. En cada experimento el resultado central es la curva de fuente recuperada.

4.3.1. Caso base de referencia

El caso base de referencia corresponde a la configuración más favorable del problema inverso bajo Robin. Se define por la combinación de una fuente gaussiana suave (Gauss 1), temperatura ambiente constante a 20 °C, cobertura máxima de sensores (nueve nodos, configuración A, distribuidos desde el eje hacia la pared según la Figura 4.6) y ausencia de ruido en las mediciones. La elección es deliberada: reúne la mayor cantidad de información disponible, los nueve nodos sensorizados, sobre datos limpios y la morfología de fuente más sencilla, de modo que aísla el problema inverso bajo Robin en su forma más tratable. Sirve, por tanto, como techo de desempeño del método y como referencia respecto de la cual se interpreta, de forma aislada, la degradación que introduce cada factor en los barridos siguientes: la morfología de la fuente (Sección 4.3.4), la cobertura de sensores y el ruido (Sección 4.3.2) y el perfil de temperatura ambiente (Sección 4.3.3). Al tratarse además de un ambiente constante, dispone de las tres referencias de comparación (FEM, solución analítica y PINN). La Tabla 4.4 resume sus

métricas.

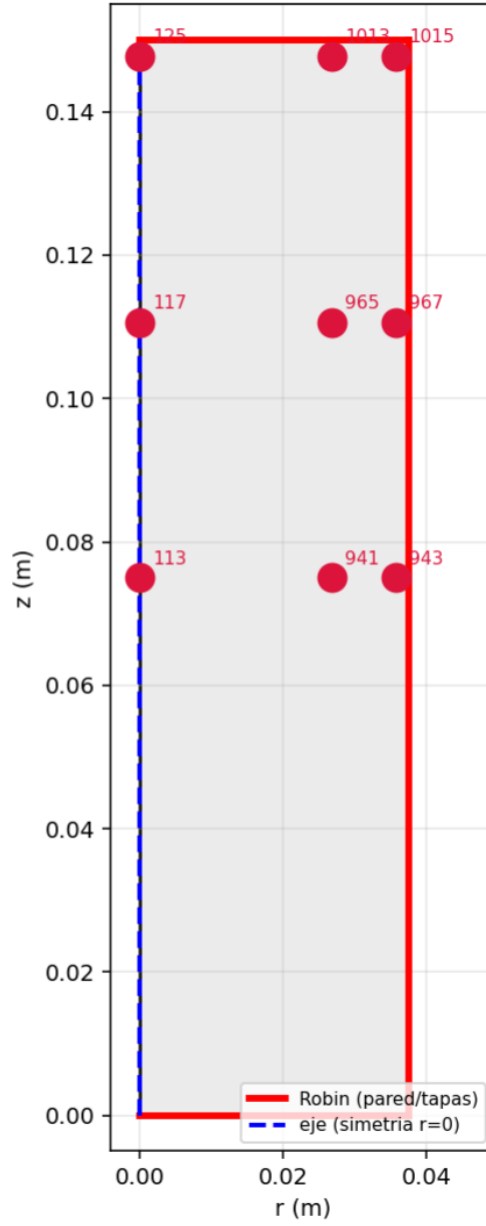


Figura 4.6: Disposición de los nueve nodos sensorizados (configuración A) sobre el plano axisimétrico (r, z) de la probeta, con la condición de Robin impuesta sobre pared y tapas y la simetría en el eje. Fuente: elaboración propia.

Métrica	Campo T [°C]	Fuente $\dot{Q}(t)$ [u. ref.]
R^2	1,0000	0,99999
RMSE	0,0035	0,042
Máx. puntual	0,016	0,307
Error energía [%]	–	0,11
Error pico [%]	–	0,46

Tabla 4.4: Métricas del caso base de referencia (Gauss 1, ambiente constante, nueve sensores, sin ruido). El campo de temperatura se compara contra el FEM y la fuente recuperada contra la curva de referencia. El RMSE y el máximo puntual del campo están en °C; los de la fuente, en unidades de la curva de referencia.

El campo de temperatura se recupera de forma esencialmente exacta. El error global de la PINN frente al FEM es de 0,0035 °C de RMSE, con $R^2 = 1,0000$ y un error máximo puntual de 0,016 °C sobre todo el dominio espacio-temporal. El error es además uniforme entre nodos: el RMSE por nodo se mantiene entre 0,003 y 0,004 °C desde el eje hasta la pared, sin la concentración cercana a la frontera, en línea con lo observado para la condición de Robin en la fase exploratoria (Sección 4.2.2). Como referencia de escala, el propio FEM se aparta de la solución analítica en 0,0015 °C, que es su error de discretización, y la PINN reproduce esa misma solución analítica con un RMSE de 0,0037 °C, esto es, ajusta la solución exacta con una fidelidad del mismo orden que el FEM.

La fuente recuperada, que constituye el resultado central del experimento, reproduce la curva de referencia con la misma fidelidad (Figura 4.7). El coeficiente de determinación es $R^2 = 0,99999$ y los dos descriptores físicos de la curva se recuperan con holgura por debajo del 1 %: la energía total liberada, que corresponde al calor de hidratación integrado, presenta un error del 0,11 % (49 998 frente a 50 053 en unidades de la fuente de referencia), y el valor de pico un error del 0,46 % (66,46 frente a 66,15). El residual entre la curva recuperada y la real es pequeño y carece de sesgo apreciable. Este resultado establece que, en condiciones ideales, la identificación inversa bajo Robin recupera tanto la forma como las magnitudes integrales de la fuente con un error inferior al medio por ciento.

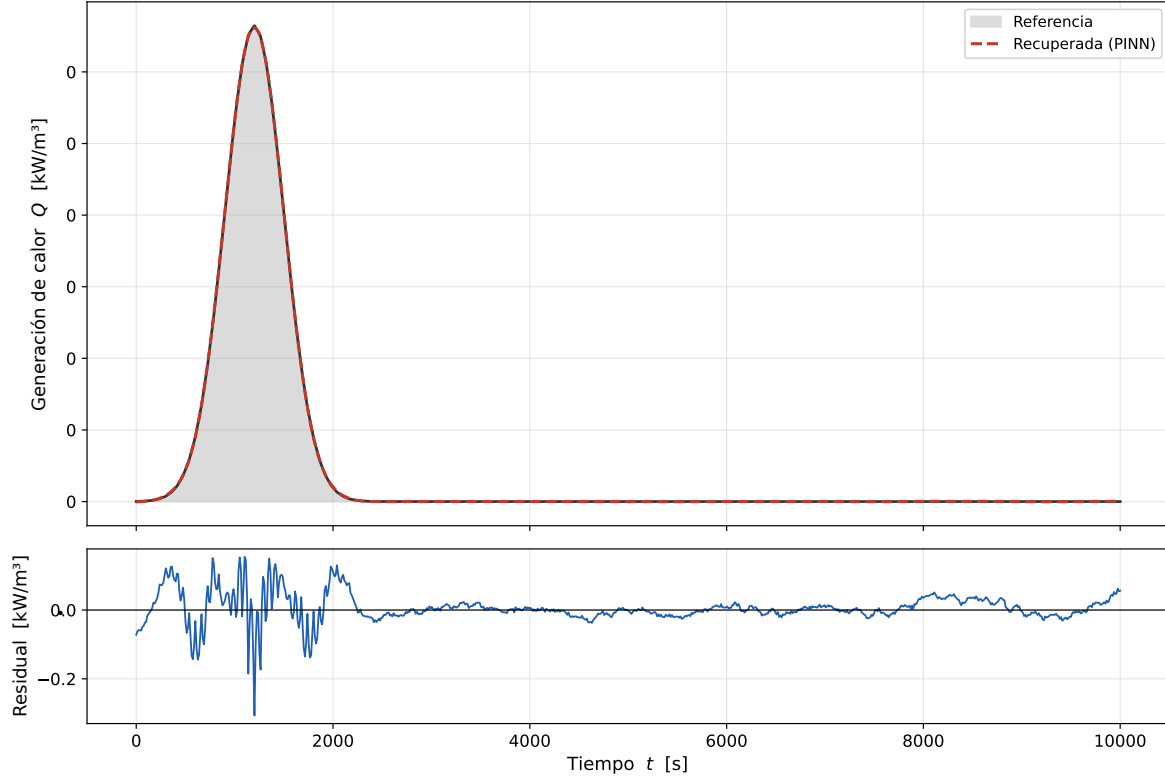


Figura 4.7: Curva de generación de calor recuperada por la PINN (línea discontinua) frente a la fuente de referencia (sombreado) para el caso base, con el residual en el panel inferior. Fuente: elaboración propia.

Los diagnósticos de generalización confirman que este desempeño no proviene de un sobreajuste. La razón entre el error de validación y el de entrenamiento es de 1,05, y el término de datos alcanza un valor final del orden de 5×10^{-9} . Dado que la configuración A emplea los nueve nodos como sensores, no existen nodos espaciales held-out; la validación se realiza sobre un conjunto temporal independiente ($n = 1351$), cuyo RMSE ($0,0036^\circ\text{C}$) coincide con el de entrenamiento ($0,0035^\circ\text{C}$). El criterio de parada temprana detuvo la optimización en el paso 33 500, tras alcanzar la mejor validación en el paso 26 000, punto en el cual la fuente ya había convergido y conserva un R^2 de 0,99999 tanto en el modelo seleccionado como al final del entrenamiento (Ver figura 4.8). Conviene anticipar, no obstante, que la convergencia de la fuente es oscilatoria a lo largo del entrenamiento, un comportamiento que en el caso base no afecta al modelo entregado, pero que se vuelve determinante en los regímenes más exigentes analizados más adelante (Secciones 4.3.2 y 4.3.5).

El valor $R^2 = 0,99999$ de la fuente podría, a primera vista, sugerir un sobreajuste.

Conviene descartarlo de forma explícita en este caso base, porque el argumento se traslada al resto de la tesis: si la configuración con mayor información y datos limpios no sobreajusta, ninguna configuración con menos información lo hará por una razón distinta de su propio límite de identificabilidad. El sobreajuste puede manifestarse por tres vías, y las tres quedan cerradas.

La primera es la memorización de la fuente. No es posible: $\dot{Q}(t)$ nunca aparece en la función de pérdida (Capítulo 3), sino que se reconstruye de forma indirecta a partir de las mediciones de temperatura. Un R^2 alto sobre una cantidad que la red nunca observa no puede provenir de memorizarla, sino de que la física, a través del residual de la PDE, restringe la solución hasta hacerla identificable.

La segunda es la memorización de los nodos sensorizados por parte del campo de temperatura. Para descartarla se reentrena el mismo caso reduciendo la cobertura a 4, 3 y 1 sensores, de modo que los nodos no utilizados queden como held-out, es decir, nunca vistos por el término de datos. Esta reducción se emplea aquí únicamente como diagnóstico de generalización; el barrido completo de sensores y ruido se analiza en la Sección 4.3.2. La Tabla 4.5 resume el resultado: al retirar sensores, el RMSE en los nodos held-out se mantiene en el orden de 0,005 a 0,007 °C, con $R^2 = 1,0000$ en todos ellos. El caso extremo es concluyente: entrenada con un único sensor, la red reconstruye la temperatura en los ocho nodos restantes con un RMSE de 0,005 °C (Figura 4.9). Una reconstrucción de esa exactitud sobre puntos sin datos es incompatible con la memorización, que dejaría el resto del dominio sin restringir; solo es posible porque el residual de la PDE impone un campo globalmente consistente. Es la física, y no el ajuste a los datos, la que sostiene la solución.

La tercera es el sobreajuste temporal. La razón entre el error de validación y el de entrenamiento, medida sobre un conjunto temporal held-out, se mantiene entre 1,05 y 1,15 en las cuatro configuraciones, y la pérdida de validación no diverge durante el entrenamiento. El criterio de parada temprana selecciona el modelo en el mínimo de validación; en el caso de un único sensor, donde la fuente presenta una leve deriva tardía (su R^2 pasa de 0,99997 en el modelo seleccionado a 0,996 al final del entrenamiento), es precisamente esa selección la que entrega el modelo convergido y descarta el degradado.

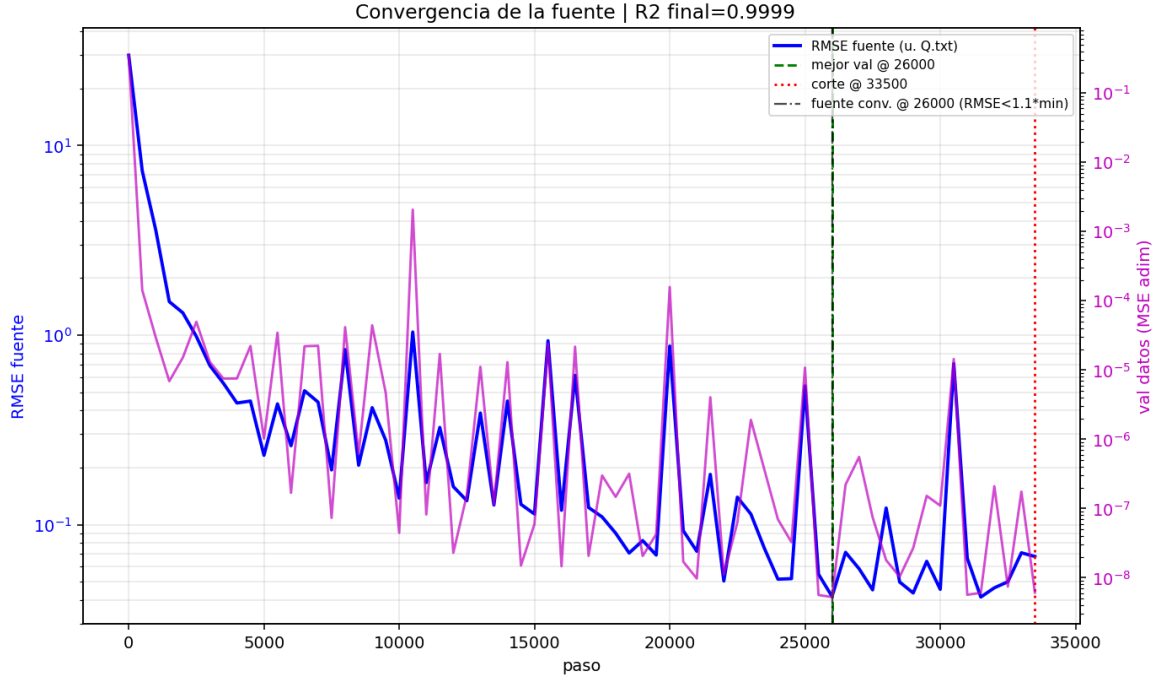


Figura 4.8: Convergencia de la fuente para el caso base (Gauss 1, ambiente constante, nueve sensores, sin ruido). En azul, el RMSE de la fuente recuperada (eje izquierdo) frente al paso de optimización; en magenta, la pérdida de validación sobre datos held-out (eje derecho). Las líneas verticales marcan el paso de mejor validación (26 000) y el de parada temprana (33 500). Fuente: elaboración propia.

En conjunto, las tres vías quedan cerradas: la fuente no se memoriza porque no está en la pérdida, el campo generaliza a nodos no vistos incluso con un solo sensor, y la validación temporal no se degrada. El R^2 cercano a la unidad refleja, por tanto, un problema bien planteado y bien resuelto en condiciones ideales, y no un artefacto de sobreajuste. Establecido esto en el caso de máxima información, las configuraciones más exigentes de las secciones siguientes se interpretan ya sin esta sospecha: cuando la reconstrucción se degrada, como en el límite de un sensor con ruido alto (Sección 4.3.2), la causa es la pérdida de identificabilidad o el ajuste del ruido, no la memorización de los datos.

Config. (sensores)	A (9)	B (4)	C (3)	D (1)
RMSE sensores [°C]	0,0035	0,0036	0,0041	0,0025
RMSE held-out [°C]	–	0,0060	0,0066	0,0053
gap val/train	1,05	1,15	1,13	1,13
$R^2(\dot{Q})$	0,99999	0,99995	0,99996	0,99997
Error energía [%]	0,11	0,04	0,09	0,12

Tabla 4.5: Diagnóstico de generalización del caso base (sin ruido) al reducir la cobertura de sensores. El RMSE en held-out es el error en los nodos no usados como datos; el símbolo – indica que la configuración A emplea los nueve nodos y no deja nodos held-out. La calidad de la fuente recuperada se mantiene aun reduciendo la información a un único sensor.

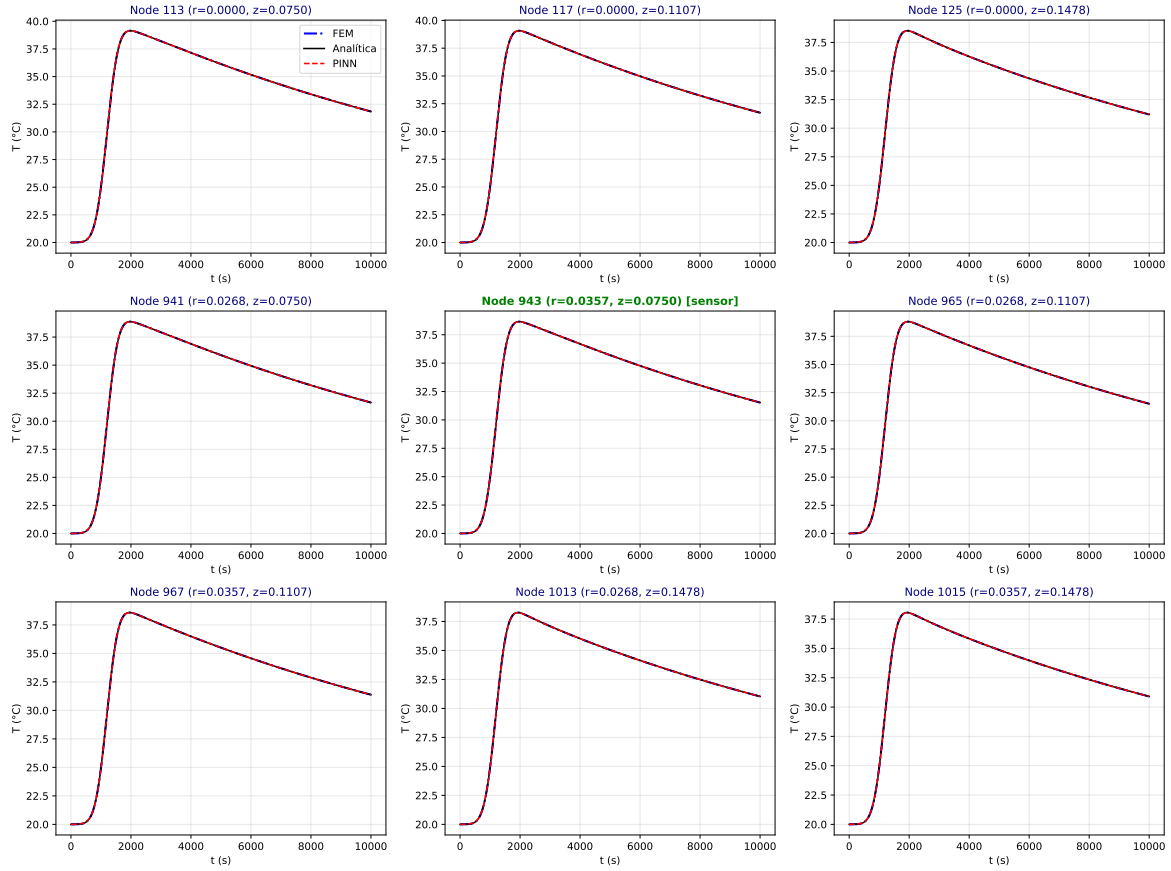


Figura 4.9: Campo de temperatura (FEM, solución analítica y PINN) en los nueve nodos para el caso base entrenado con un único sensor (nodo 943). La PINN reproduce la temperatura también en los ocho nodos held-out, lo que evidencia reconstrucción del campo y no memorización de los datos. Fuente: elaboración propia.

4.3.2. Robustez frente a la cobertura de sensores y al nivel de ruido

Esta sección caracteriza la respuesta del método a las dos fuentes de degradación propias de un ensayo real, estudiadas de forma conjunta: la cobertura de sensores (9, 4, 3 y 1 nodos) y el nivel de ruido en las mediciones ($\sigma = 0, 0,5, 1$ y 2°C). El análisis se construye principalmente sobre la fuente Gauss 1, que al recuperarse de forma casi exacta en el caso base permite aislar el efecto de ambos factores de la dificultad de la morfología, y se contrasta luego con el pulso rectangular. Cada fuente se barre sobre la grilla completa de 4×4 combinaciones.

La Tabla 4.6 muestra el coeficiente de determinación de la fuente recuperada para Gauss 1 sobre la grilla. Con datos limpios, la calidad se mantiene en una meseta de $R^2 \approx 0,9999$ al reducir la cobertura de nueve a un único sensor, sin el colapso que se había observado en la validación inversa bajo Dirichlet (Sección 4.2.3). Bajo la condición de Robin, por tanto, un solo sensor limpio basta para identificar la fuente. El ruido sí degrada el ajuste: a nueve sensores, el R^2 desciende de 0,99999 a 0,99032 al pasar σ de 0 a 2°C , y la degradación se compone con la pérdida de sensores. El colapso aparece únicamente en la esquina más exigente, un sensor con $\sigma = 2^\circ\text{C}$, donde el R^2 cae a 0,913. La grilla presenta, en consecuencia, una amplia meseta de buen desempeño y una única esquina de falla.

Sensores	$\sigma = 0$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$
9	0,99999	0,99926	0,99789	0,99032
4	0,99995	0,99808	0,99281	0,94234
3	0,99996	0,99867	0,99492	0,94172
1	0,99997	0,99606	0,99050	0,91316

Tabla 4.6: Coeficiente de determinación $R^2(\dot{Q})$ de la fuente recuperada (Gauss 1) en la grilla cobertura de sensores $\times$ nivel de ruido. La calidad se conserva en una meseta y solo colapsa en la esquina de un sensor con ruido alto.

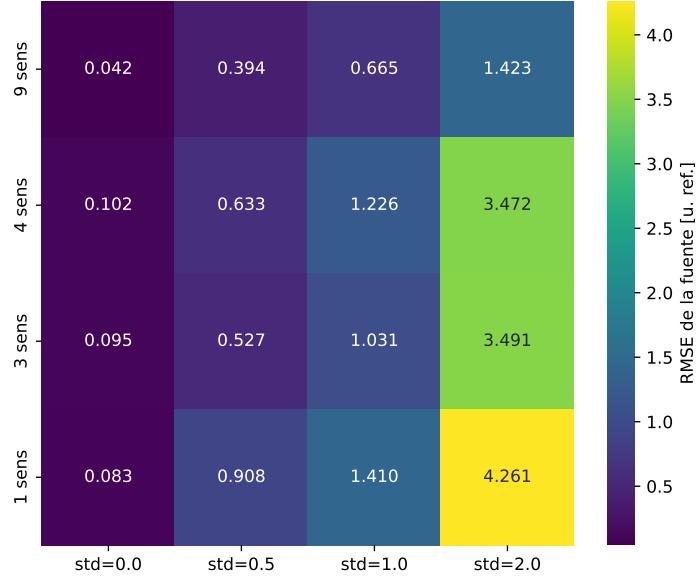


Figura 4.10: RMSE de la fuente recuperada (Gauss 1) sobre la grilla cobertura de sensores $\times$ nivel de ruido, en unidades de la curva de referencia. El error crece de forma suave con el ruido y con la reducci3n de sensores, en l3nea con la meseta del R^2 de la Tabla 4.6. Fuente: elaboraci3n propia.

La energ3a total liberada, que corresponde al calor de hidrataci3n integrado, presenta un comportamiento notablemente m3s robusto (Tabla 4.7). Su error se mantiene por debajo del 5 % en toda la grilla, con un m3ximo de 4,54 %. El caso l3mite es ilustrativo: en la esquina de un sensor con $\sigma = 2^\circ\text{C}$, donde el R^2 colapsa a 0,913 y el error de pico se dispara al 45 %, la energ3a se recupera con un error de apenas 0,39 %. La raz3n es que la energ3a es una magnitud integral: las desviaciones locales de la curva instant3nea se promedian al integrar, de modo que el calor total liberado se conserva aun cuando la forma instant3nea est3 mal ajustada. El error de pico, en cambio, es el descriptor m3s fr3gil, pues mide el ajuste en un 3nico instante: a nueve sensores crece de forma moderada con el ruido (de 0,46 a 3,26 %), pero en la esquina de un sensor con ruido m3ximo alcanza el 45 % (Figura 4.11).

Sensores	$\sigma = 0$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$
9	0,11	0,21	0,03	0,97
4	0,04	0,45	0,29	0,82
3	0,09	1,53	2,28	4,54
1	0,12	0,79	0,57	0,39

Tabla 4.7: Error de energía de la fuente recuperada [%] (Gauss 1) en la grilla cobertura de sensores $\times$ nivel de ruido. El error permanece acotado por debajo del 5 % en todas las combinaciones.

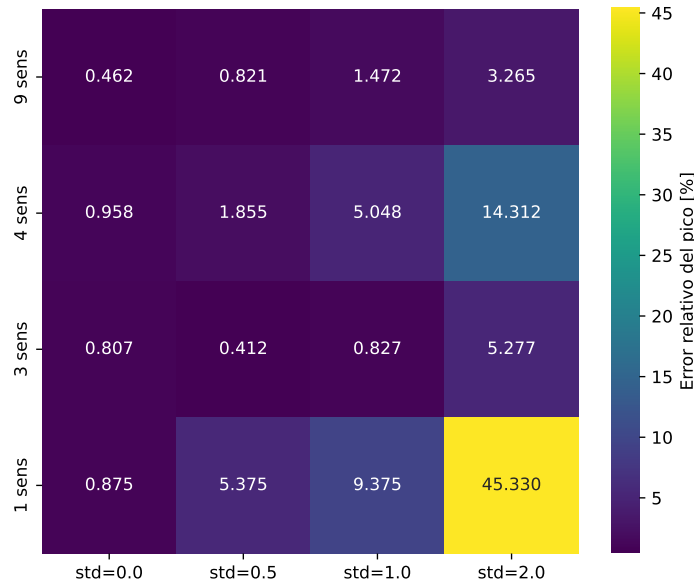


Figura 4.11: Error de pico de la fuente recuperada [%] (Gauss 1) sobre la grilla cobertura de sensores $\times$ nivel de ruido. El deterioro se concentra en la fila de un sensor y la columna de ruido máximo, donde el descriptor más frágil alcanza el 45 %. Fuente: elaboración propia.

El término físico de la pérdida confiere a la red una capacidad de filtrado del ruido. La fuga de ruido, definida como el cociente entre el RMSE del campo y la desviación estándar del ruido inyectado, se mantiene entre 0,11 y 0,21 con cobertura adecuada, lo que equivale a que la red rechaza entre el 79 y el 89 % del ruido en lugar de ajustarlo (Figura 4.12). El residual de la PDE actúa así como un regularizador: la solución debe satisfacer la ecuación de calor, lo que le impide seguir las fluctuaciones aleatorias de las mediciones. El rechazo se mantiene estable a través de la grilla y disminuye solo de forma leve al nivel de ruido más alto, sin una dependencia clara de la cobertura de sensores.

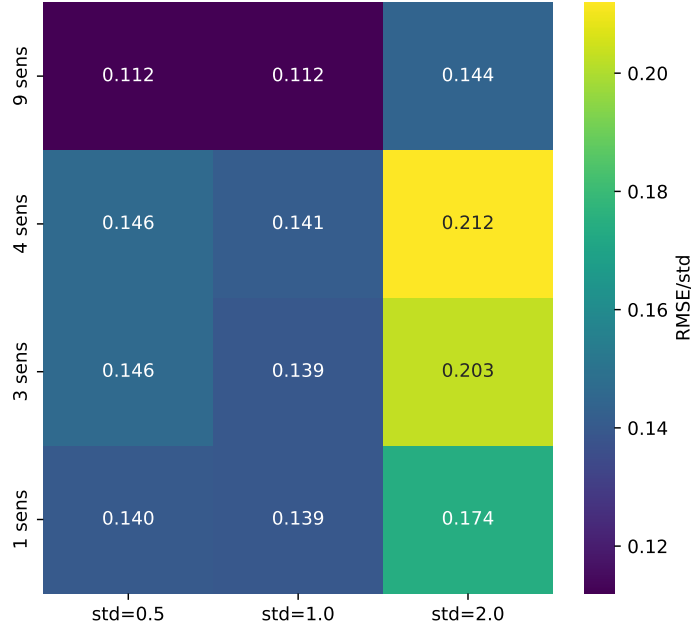


Figura 4.12: Fuga de ruido (Gauss 1), definida como el cociente entre el RMSE del campo y la desviación estándar del ruido inyectado, sobre la grilla cobertura de sensores $\times$ nivel de ruido (se omite la columna $\sigma = 0$). Valores bajos indican un mayor rechazo del ruido por el término físico de la pérdida. Fuente: elaboración propia.

Este comportamiento es coherente con la ausencia de sobreajuste establecida en el caso base (Sección 4.3.1). Con datos limpios, la razón entre el error en nodos sensorizados y en nodos held-out se mantiene por debajo de la unidad en toda la grilla, sin indicio de memorización. Al aumentar el ruido y reducir los sensores, esa razón supera el umbral de 1,3 y llega a valores del orden de 2 en las celdas más degradadas, lo que indica que la red comienza a ajustar el ruido en los sensores. Conviene precisar la lectura: no se trata de un defecto del método, sino del diagnóstico funcionando como se espera, detectando el ajuste al ruido cuando la información es escasa y ruidosa; el efecto está acotado y, como muestra la robustez de la energía, no compromete la magnitud físicamente decisiva. El RMSE del campo de temperatura (Figura 4.13) resume esta degradación: permanece bajo en casi toda la grilla y solo crece de forma apreciable en la columna de ruido máximo.

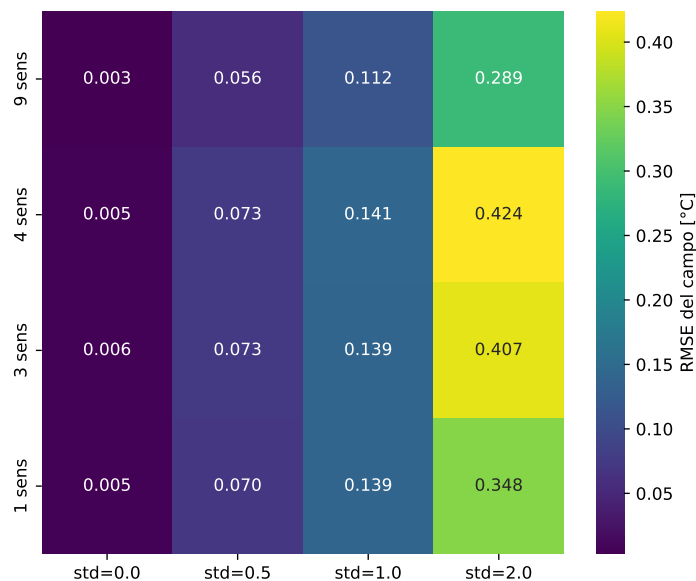


Figura 4.13: RMSE del campo de temperatura (PINN vs FEM, Gauss 1) sobre la grilla cobertura de sensores $\times$ nivel de ruido. El error del campo se mantiene bajo y crece de forma suave con el ruido, sin el colapso que afecta a los descriptores puntuales de la fuente. Fuente: elaboración propia.

El pulso rectangular ofrece un contraste revelador. Su coeficiente de determinación está topado en torno a 0,97 por el error en los flancos discontinuos (Sección 4.3.4), y en consecuencia permanece casi plano en toda la grilla, entre 0,960 y 0,988, prácticamente insensible a la cobertura de sensores y al ruido. La degradación de las mediciones queda enmascarada porque es la morfología, y no la información disponible, la que fija el techo de la métrica. Sus magnitudes físicas, en cambio, se conservan robustas en toda la grilla: el error de energía se mantiene entre 0,43 y 3,32 % y el de pico entre 0,01 y 4,01 % (Figura 4.14). Como salvedad metodológica, en once de las dieciséis corridas rectangulares la selección por validación se gatilló antes de que la fuente terminara de converger, síntoma de un acople más débil entre la validación del campo de temperatura y la convergencia de la fuente para morfologías no suaves, aspecto que se retoma en la Sección 4.3.5.

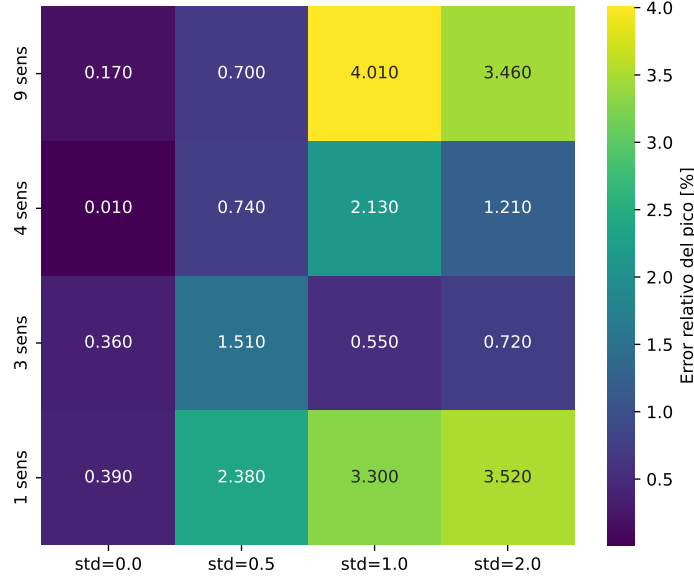


Figura 4.14: Error de pico del pulso rectangular [%] sobre la grilla cobertura de sensores $\times$ nivel de ruido. A diferencia de la fuente suave, el error permanece acotado en toda la grilla, pues las magnitudes integrales del pulso son robustas frente a la degradación de las mediciones. Fuente: elaboración propia.

En conjunto, el barrido entrega una conclusión robusta y físicamente relevante: a través de las dos morfologías y de toda la grilla de condiciones, la energía total liberada se recupera con un error inferior al 5 %, de modo que la magnitud que gobierna el agrietamiento térmico es robusta frente a la degradación de las mediciones. La fidelidad puntual, medida por el R^2 y el error de pico, es más sensible y se deteriora al reducir los sensores y aumentar el ruido, de forma aguda solo en la esquina de un sensor con ruido máximo para la fuente suave. El término físico de la pérdida aporta, además, un rechazo de ruido del orden del 85 % y previene la memorización espacial salvo en las condiciones más degradadas.

4.3.3. Efecto del perfil de temperatura ambiente

Esta sección evalúa el efecto de la temperatura ambiente sobre la reconstrucción, manteniendo la fuente de Arrieta y las condiciones del caso base (nueve sensores, sin ruido). Se compara el ambiente constante a 20 °C con tres perfiles senoidales centrados en 20 °C y amplitudes de ± 1 , ± 2 y ± 5 °C, pensados para reproducir las fluctuaciones de una cámara de curado. A diferencia del resto del capítulo, en los casos de ambiente variable

la única referencia disponible es la simulación de elementos finitos, dado que la solución analítica por autofunciones no admite una temperatura exterior dependiente del tiempo (Sección 4.1). El caso de ambiente constante actúa como referencia. La Tabla 4.8 resume los resultados.

Ambiente	$R^2(\dot{Q})$	Error energía [%]	Error pico [%]	RMSE campo [°C]
Constante	0,921	15,65	20,87	0,0489
Senoidal $\pm 1^\circ\text{C}$	0,961	8,91	12,78	0,0468
Senoidal $\pm 2^\circ\text{C}$	0,922	15,50	19,48	0,0579
Senoidal $\pm 5^\circ\text{C}$	0,564	34,17	29,09	0,1488

Tabla 4.8: Calidad de la reconstrucción para distintos perfiles de temperatura ambiente, con fuente de (Arrieta Costa, 2025), nueve sensores y sin ruido. La referencia del campo es la simulación FEM, dado que la solución analítica no aplica con ambiente variable. Cada fila corresponde a una única corrida.

El único efecto inequívoco del barrido es la degradación bajo el perfil de mayor amplitud. Con un ambiente senoidal de $\pm 5^\circ\text{C}$, la calidad de la fuente cae de forma marcada respecto del caso constante: el coeficiente de determinación desciende de 0,921 a 0,564, el error de energía se duplica hasta el 34 % y el RMSE del campo de temperatura crece de 0,049 a 0,149 °C. El origen de esta degradación no es la sola escala temporal larga de la reacción, que ya está presente en el caso constante y fija su desempeño base en torno a $R^2 = 0,92$, sino la interferencia adicional del ambiente: la oscilación de $\pm 5^\circ\text{C}$ impone sobre el campo de temperatura una dinámica de magnitud comparable a la que produce la fuente, lenta y de baja amplitud, de modo que la red debe separar dos contribuciones que se confunden. El campo de temperatura, sin embargo, se sigue recuperando de forma aceptable ($R^2 = 0,996$ frente al FEM); es el problema inverso el que amplifica el error del campo al intentar atribuir a la fuente una señal que el ambiente domina.

Los perfiles de amplitud moderada, en cambio, no degradan la reconstrucción de forma apreciable. Tanto el caso de $\pm 1^\circ\text{C}$ como el de $\pm 2^\circ\text{C}$ arrojan métricas comparables a las del ambiente constante, con coeficientes de determinación entre 0,92 y 0,96 y errores de energía del orden del 9 al 16 %. El comportamiento no es estrictamente monótono en la amplitud: el caso de $\pm 1^\circ\text{C}$ resulta incluso marginalmente mejor que el constante. Esta no monotonía, junto con el hecho de que cada perfil corresponde a una única corrida y de que el caso de $\pm 1^\circ\text{C}$ presenta una deriva tardía de la fuente corregida por la selección por validación, indica que las diferencias entre el ambiente constante y los

perfiles de amplitud moderada se encuentran dentro de la variabilidad de entrenamiento y no deben interpretarse como una tendencia. La lectura defendible es más simple: una fluctuación ambiental moderada, del orden de las que cabe esperar en una cámara de curado, no compromete la reconstrucción, y solo una oscilación grande respecto de la señal de la fuente la degrada.

En conjunto, el método tolera variaciones moderadas de la temperatura ambiente y mantiene en esos casos el mismo nivel de desempeño que bajo ambiente constante, limitado por la dificultad intrínseca de la fuente de Arrieta. La degradación aparece únicamente cuando la amplitud del ambiente se vuelve grande en relación con la débil señal térmica de la fuente, una limitación asociada a la baja tasa de generación de la curva de hidratación y que se retoma en la discusión.

4.3.4. Efecto de la morfología de la fuente

La principal ventaja del enfoque basado en PINNs frente al método clásico de calibración inversa es que no impone una forma funcional a priori sobre $\dot{Q}(t)$: la fuente se representa con una red neuronal capaz, en principio, de aproximar morfologías arbitrarias. Esta sección pone a prueba esa capacidad recuperando un conjunto de perfiles de referencia cualitativamente distintos, manteniendo fijas las condiciones del caso base (nueve sensores, sin ruido) para aislar el efecto de la forma. Los perfiles abarcan desde gaussianas de distinta anchura hasta un pulso rectangular y la curva de hidratación de Arrieta, esta última como caso de mayor relevancia física. La Tabla 4.9 resume los resultados.

Perfil de fuente	$T_{\max}$ [s]	$R^2(\dot{Q})$	Error energía [%]	Error pico [%]
Gaussiana (Gauss 1)	10 000	0,99999	0,11	0,46
Gaussiana estrecha (Gauss 2)	80 000	0,99882	0,34	0,50
Rectangular	80 000	0,97396	0,70	0,17
Curva de Arrieta	250 000	0,92126	15,65	20,87

Tabla 4.9: Calidad de la fuente recuperada para distintos perfiles de referencia, a cobertura máxima de sensores y sin ruido. $T_{\max}$ es el horizonte temporal de cada experimento.

Las dos fuentes gaussianas se recuperan con una fidelidad prácticamente idéntica a la del caso base, pese a diferir en anchura y en horizonte temporal: la gaussiana estrecha (Gauss 2, llamada así porque el ancho del pulso de la fuente es mas corto en tiempo),

más concentrada en el tiempo, alcanza un R^2 de 0,99882 con errores de energía y de pico del orden del medio por ciento. Como verificación adicional se evaluaron tres gaussianas más (Gauss 3 a 5), a cobertura máxima de doce sensores, que se reconstruyen igualmente con $R^2 \geq 0,9999$ y errores de energía inferiores al 0,1 %. La red reproduce, por tanto, la familia gaussiana en todo el rango de formas ensayado sin dificultad apreciable.

El pulso rectangular constituye una prueba más exigente, por tratarse de una morfología no suave y ajena por completo a la familia gaussiana. La red captura correctamente el tope plano del pulso y, sobre todo, sus magnitudes integrales: el error de energía es de 0,70 % y el de pico de apenas 0,17 % (Figura 4.15). El coeficiente de determinación, en cambio, baja a 0,974, pero esa caída no refleja una mala reconstrucción global sino el error localizado en los dos flancos del pulso, donde la red suaviza las transiciones abruptas (el residual se concentra en sendos picos sobre los bordes, consistente con el sesgo espectral de la red ante discontinuidades). Conviene subrayar la lectura de este caso: a diferencia de un método de calibración basado en una familia paramétrica fija, que no podría siquiera representar un perfil rectangular, la PINN lo recupera en sus cantidades físicamente relevantes sin asumir forma alguna, y el único deterioro es local y penalizado por una métrica sensible a la forma como el R^2 .

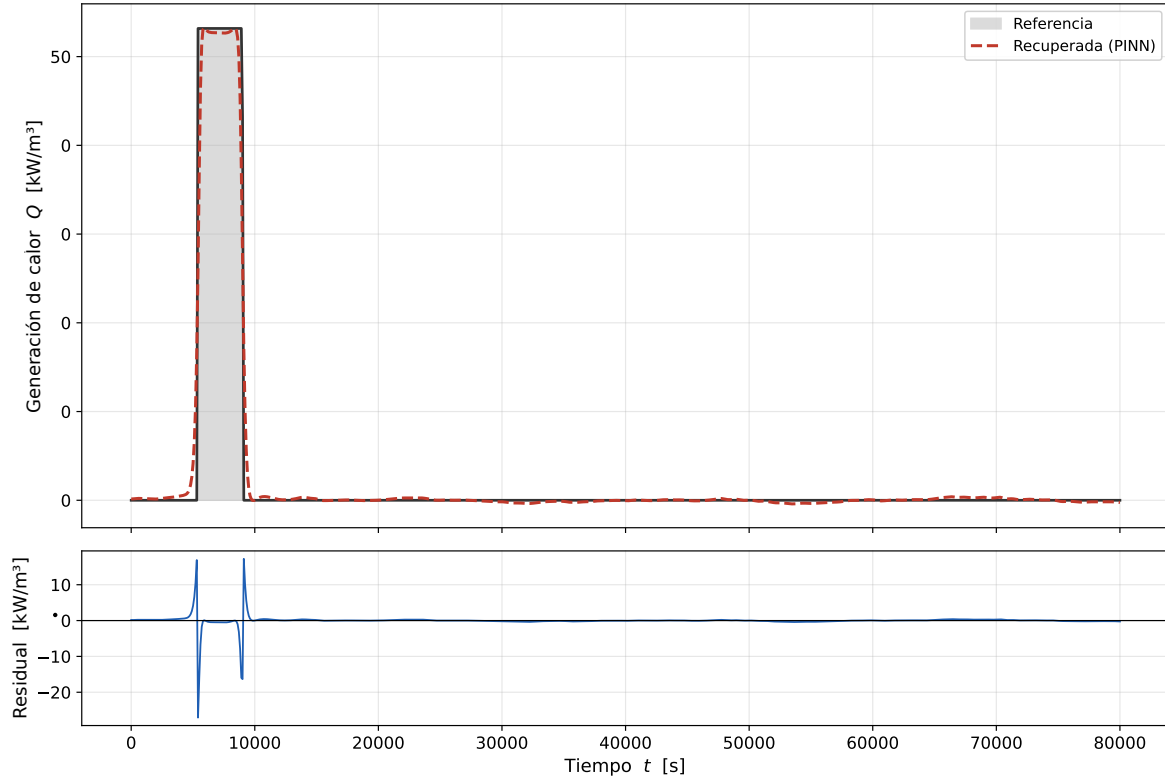


Figura 4.15: Fuente rectangular recuperada por la PINN (línea discontinua) frente a la referencia (sombreado), con el residual en el panel inferior. La red captura el tope y las magnitudes integrales; el error se concentra en los flancos discontinuos. Fuente: elaboración propia.

La curva de hidratación de Arrieta es el caso de mayor interés y, a la vez, el más difícil. Es una morfología asimétrica, con un ascenso rápido seguido de una cola larga de decaimiento, y se desarrolla sobre un horizonte temporal mucho mayor que el resto (250 000 s frente a los 10 000 del caso base). Aquí la reconstrucción se degrada de forma apreciable: la red subestima sistemáticamente la curva, con un error de pico del 20,87 % y de energía del 15,65 %, y un R^2 de 0,921 (Figura 4.16). El origen de esta dificultad no es la asimetría de la forma en sí, sino la escala temporal: al distribuirse la generación de calor sobre un intervalo tan extenso, la señal que la fuente imprime sobre el campo de temperatura se vuelve más difícil de distinguir, y la red tiende a aplanar el transitorio. Esta limitación, propia de la fuente de relevancia física del problema, es la que motivó la exploración de la densidad temporal del muestreo y de la arquitectura de la red, que se aborda en la Sección 4.3.5. La Figura 4.17 muestra la convergencia de la fuente a lo largo del entrenamiento y permite distinguir el origen de esta degradación. A diferencia

del caso base, donde el RMSE de la fuente desciende hasta el orden de 0,05, aquí la envolvente se estanca en torno a 0,08–0,09 y no baja más, pese a que la pérdida de validación sobre el campo de temperatura sigue descendiendo de forma sostenida hasta el final del entrenamiento. La fuente se da por convergida en el paso 34 500, mientras que la mejor validación se alcanza en el último paso: el campo continúa ajustándose después de que la fuente ha dejado de mejorar. Este desacople entre la convergencia del campo y la de la fuente es la manifestación temporal de la débil identificabilidad de la curva de Arrieta, el campo de temperatura admite un buen ajuste sin que ello fije la fuente correcta, y anticipa el análisis de la Sección 4.3.5, donde se examina en detalle mediante la ablación de arquitectura.

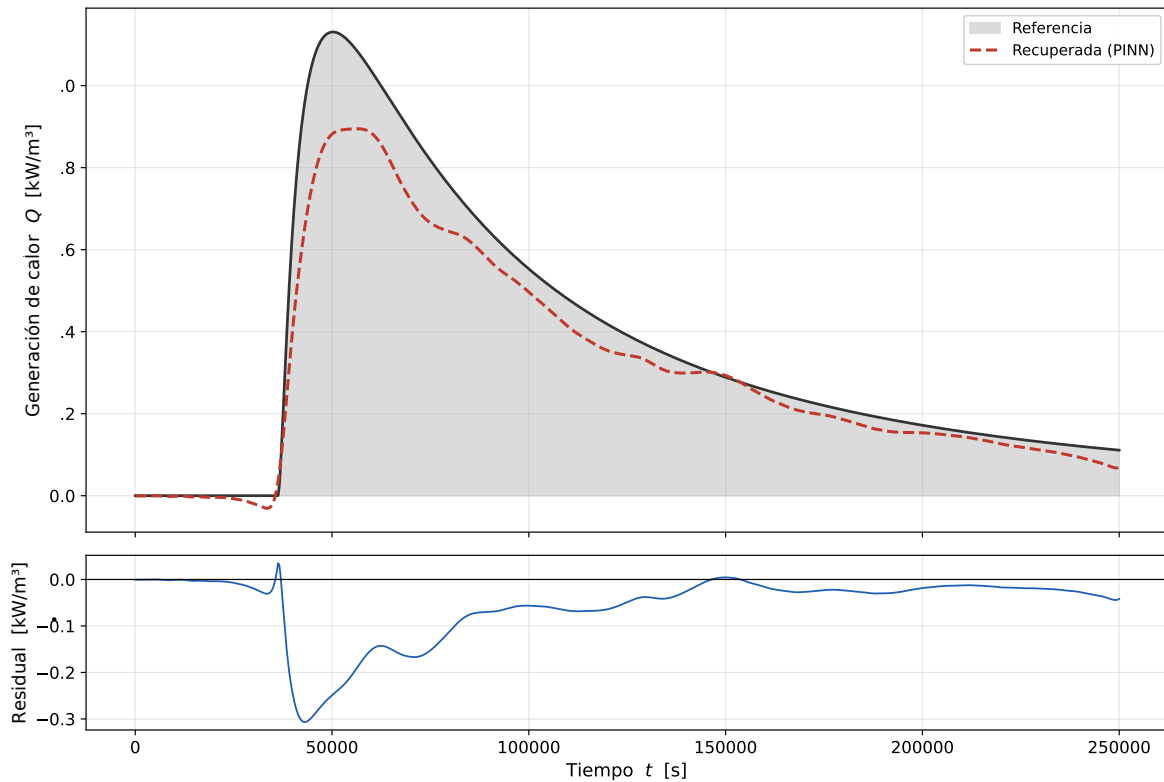


Figura 4.16: Curva de hidratación de Arrieta recuperada por la PINN (línea discontinua) frente a la referencia (sombreado). La red subestima el pico y aplana el transitorio, efecto asociado a la escala temporal larga de la fuente. Fuente: elaboración propia.

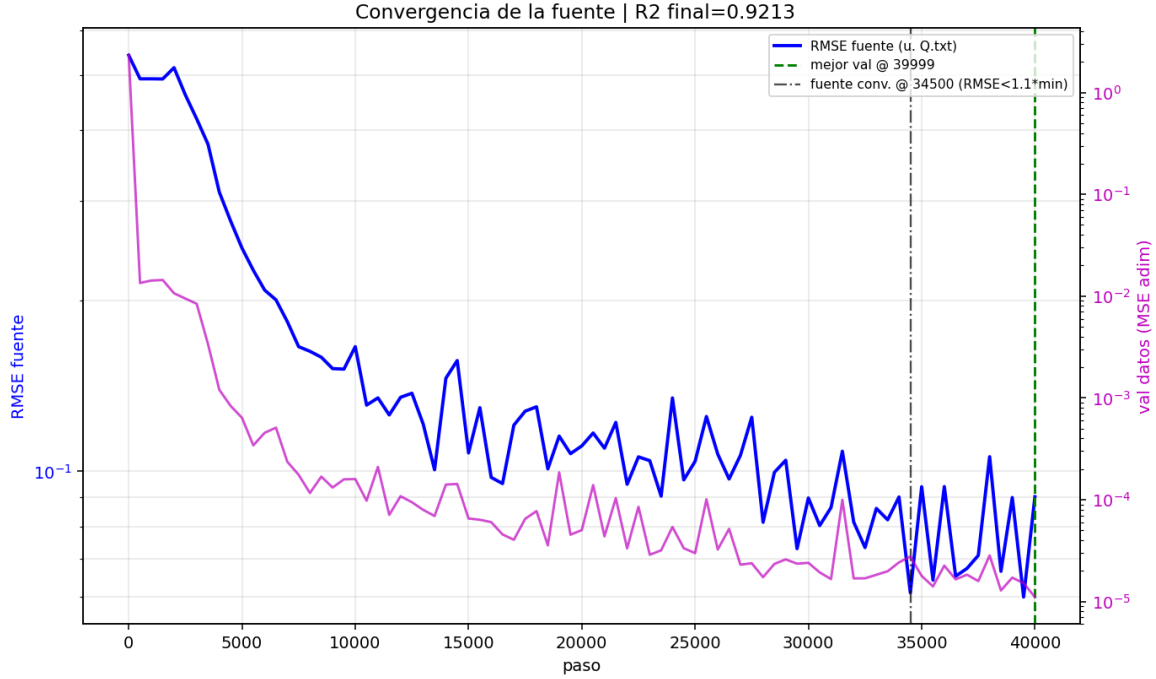


Figura 4.17: Convergencia de la fuente para la curva de hidratación de Arrieta (ambiente constante, nueve sensores, sin ruido). En azul, el RMSE de la fuente recuperada (eje izquierdo) frente al paso de optimización; en magenta, la pérdida de validación sobre datos held-out (eje derecho). La línea vertical punteada marca el paso de convergencia de la fuente (34 500) y la discontinua el de mejor validación (40 000). Fuente: elaboración propia.

En conjunto, la red recupera morfologías que van desde gaussianas suaves hasta un pulso rectangular discontinuo sin imponer ninguna forma funcional, conservando las magnitudes integrales incluso cuando el R^2 se resiente por errores locales. La única degradación sustantiva corresponde a la curva de Arrieta, cuya escala temporal extensa constituye una limitación del enfoque que se examina más adelante. Este comportamiento respalda la afirmación central del trabajo frente al método clásico: la capacidad de identificar la fuente sin restringirla a una familia paramétrica predefinida.

4.3.5. Escala temporal de la fuente de Arrieta y sensibilidad a la arquitectura

La curva de hidratación de Arrieta es, como mostró la Sección 4.3.4, el caso de mayor relevancia física y a la vez el más difícil, debido a la escala temporal extensa sobre la que se distribuye la reacción (250 000 s). Esa escala vuelve el problema inverso débilmente

identificable: muchas curvas de fuente distintas resultan compatibles con un mismo campo de temperatura medido. Esta sección examina esa dificultad mediante un estudio de ablación sobre la arquitectura de la red del campo de temperatura (profundidad y ancho) y la densidad de puntos de colocación, realizado sobre un caso exigente de Arrieta con ambiente variable, cuatro sensores, ruido de $\sigma = 0,5^\circ\text{C}$ y temperatura ambiente senoidal de $\pm 1^\circ\text{C}$. El propósito es doble: comprobar si la reconstrucción puede mejorarse y caracterizar su sensibilidad a estas decisiones de diseño. Las Figuras 4.18, 4.19 y 4.20 muestran, para cada factor, el RMSE del campo y el R^2 de la fuente. El resultado central es contraintuitivo respecto de la práctica habitual: reducir la capacidad de la red mejora la recuperación de la fuente. El efecto de la profundidad lo ilustra con claridad (Figura 4.18). Al disminuir de seis a cuatro capas, el R^2 de la fuente sube de 0,875 a 0,929 y el error de energía cae del 11,3 al 2,9%; aumentar a ocho capas, en cambio, lo empeora hasta un R^2 de 0,854. La fuente recuperada es, por tanto, mejor cuanto menos profunda es la red, dentro del rango ensayado, mientras que el RMSE del campo apenas se mueve.

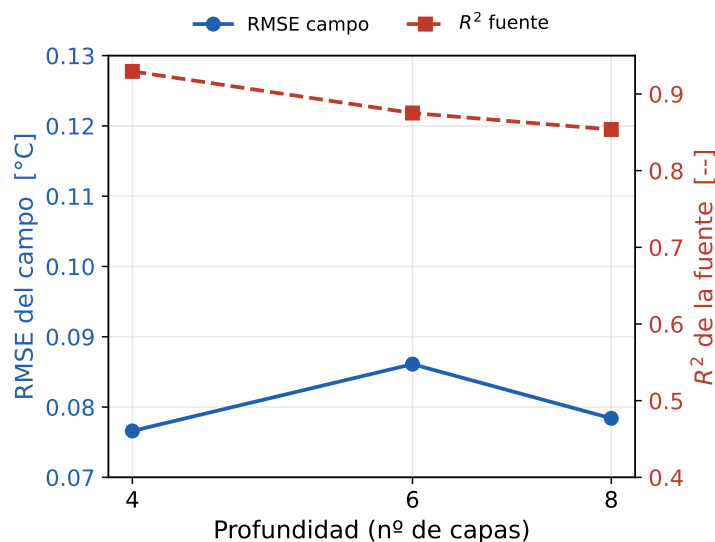


Figura 4.18: Efecto de la profundidad de la red sobre el RMSE del campo (azul, eje izquierdo) y el R^2 de la fuente (rojo, eje derecho). Fuente: elaboración propia.

El ancho de la red produce un efecto en el mismo sentido pero aún más pronunciado (Figura 4.19). Una red estrecha de 128 unidades recupera la fuente con $R^2 = 0,923$ y un error de energía del 2,7 %, comparable a la mejor configuración de profundidad,

mientras que una red ancha de 512 unidades colapsa a $R^2 = 0,424$ con un error de energía del 47 %. El ancho es, de los tres factores, el que más degrada la reconstrucción cuando se aumenta en exceso.

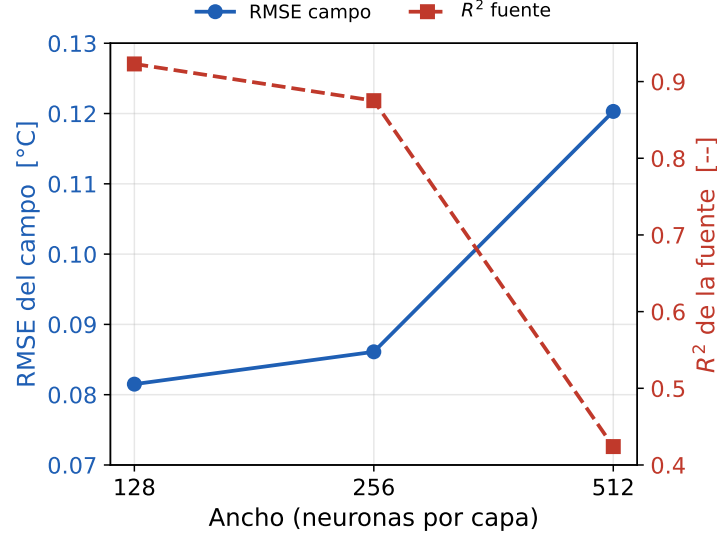


Figura 4.19: Efecto del ancho de la red (neuronas por capa) sobre el RMSE del campo (azul) y el R^2 de la fuente (rojo). Fuente: elaboración propia.

La densidad de puntos de colocación actúa en sentido inverso y de forma monótona: más restricciones físicas mejoran la fuente (Figura 4.20). Al pasar de 1024 a 16384 puntos, el R^2 asciende de 0,764 a 0,894 y el error de energía baja del 26,4 al 6,9 %. En contraste con todo lo anterior, el RMSE del campo de temperatura permanece casi constante en las siete variantes, entre 0,077 y 0,120 °C: la sensibilidad se concentra por completo en el problema inverso y no en el ajuste de la temperatura.

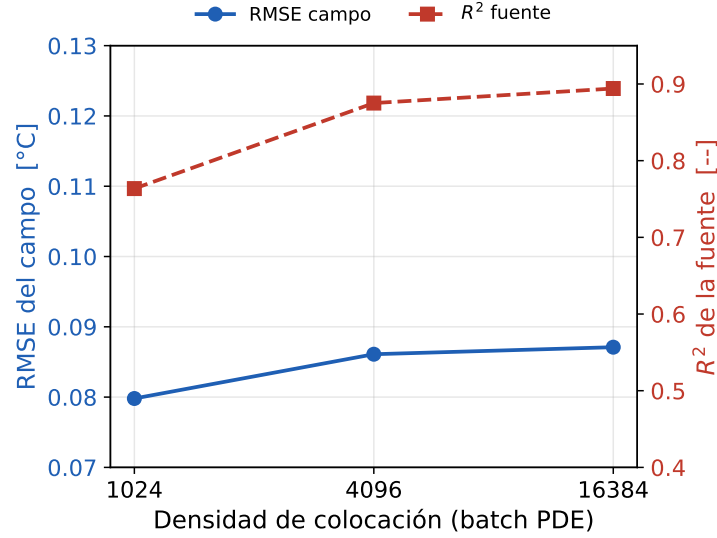


Figura 4.20: Efecto de la densidad de puntos de colocación (batch de la PDE) sobre el RMSE del campo (azul) y el R^2 de la fuente (rojo). Fuente: elaboración propia.

Conviene precisar que este deterioro no es un sobreajuste. La variante de mayor capacidad, que produce la peor fuente ($R^2 = 0,424$), presenta exactamente los mismos diagnósticos limpios que las variantes que recuperan bien la fuente: la razón entre el error en sensores y en nodos held-out es de 1,08, la razón entre validación y entrenamiento es de 1,01 y el ajuste a los datos se detiene en el piso de ruido. La red grande, por tanto, no memoriza los datos; encuentra un campo de temperatura consistente con las mediciones y con la ecuación, pero asociado a una fuente equivocada. Este es el comportamiento esperable de un problema inverso mal condicionado: como muchas fuentes son compatibles con los datos, una red de alta capacidad dispone de la libertad para converger a una de ellas que no es la correcta, mientras que una red de menor capacidad queda implícitamente regularizada hacia una solución más suave y físicamente plausible. La mayor densidad de colocación cumple un papel análogo, al añadir restricciones físicas que acotan el espacio de soluciones. Esta lectura es coherente con la ausencia de sobreajuste establecida en la Sección 4.3.1: lo que falla en la fuente de Arrieta es la identificabilidad, no la generalización. De aquí se desprenden las dos limitaciones centrales del enfoque para fuentes de escala temporal larga. La primera es que no existe una arquitectura óptima única: la configuración que recupera con exactitud las fuentes bien identificadas, como las gaussianas, resulta excesiva para la curva de Arrieta, cuya recuperación exigió reducir la red y densificar la colocación. La segunda, más limitante

en la práctica, es que la calidad de la fuente está desacoplada del error del campo, que es la única cantidad medible sin conocer el ground truth: en el estudio de profundidad, por ejemplo, la red de ocho capas ajusta el campo mejor que la de seis y, sin embargo, recupera una fuente peor. En un escenario real, donde la curva de generación de calor es desconocida por definición, esto implica que no es posible seleccionar la arquitectura adecuada a partir de las mediciones disponibles, lo que constituye una dificultad de fondo para la aplicación del método a fuentes débilmente identificables.

La Figura 4.21 ilustra esta configuración de mejor desempeño en términos de energía, correspondiente al ancho reducido de 128 unidades. La curva recuperada captura el ascenso y la posición del pico, pero presenta oscilaciones visibles en la cola de decaimiento, como evidencia el residual del panel inferior, que se mantiene en el orden de $\pm 0,1$ a $0,2$ unidades a lo largo de todo el horizonte. Estas desviaciones explican el coeficiente de determinación moderado ($R^2 = 0,923$), sensible a la forma instantánea de la curva. Sin embargo, al integrar la curva en el tiempo esas oscilaciones se compensan parcialmente entre sí, de modo que la energía total liberada, la magnitud que en definitiva gobierna el agrietamiento térmico, se recupera con un error de apenas $2,7\%$. La red satisface, por tanto, la física del problema y conserva la cantidad integral relevante, al precio de una fidelidad temporal punto a punto todavía inferior a la de las fuentes bien identificadas de la Sección 4.3.4.

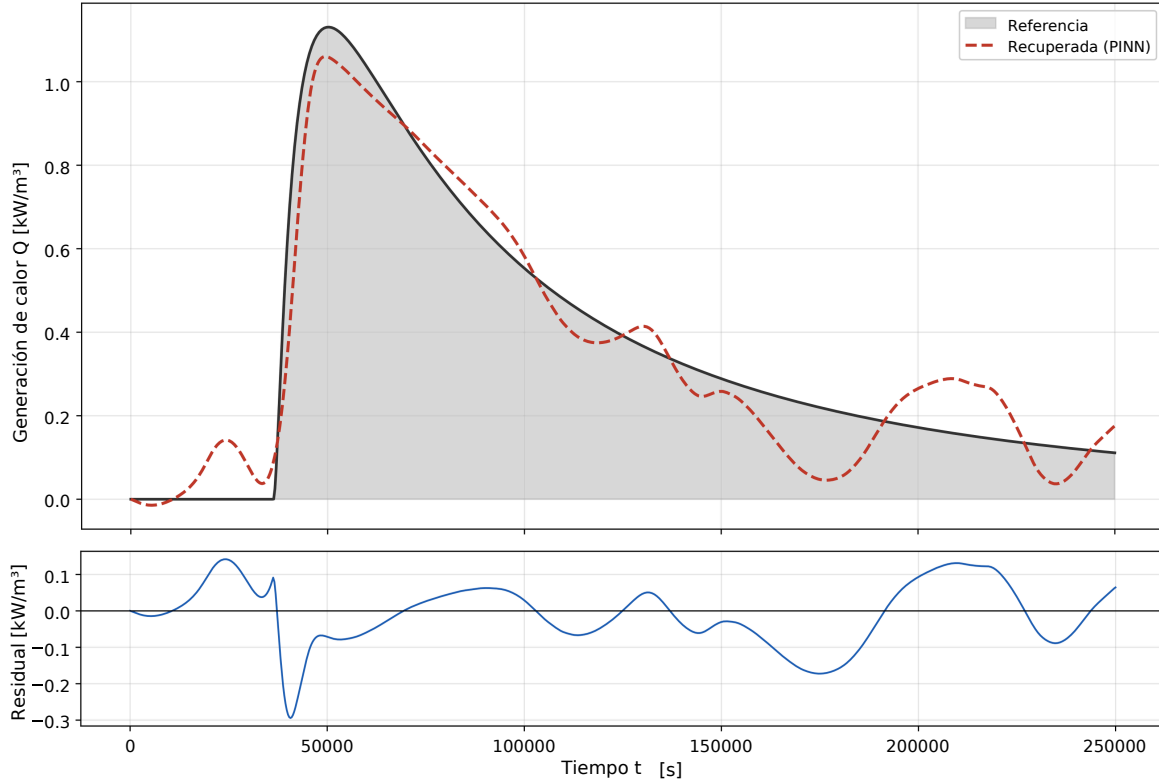


Figura 4.21: Fuente de hidratación de Arrieta recuperada por la PINN bajo la configuración de ancho reducido (128 unidades), con el residual respecto de la referencia en el panel inferior. $R^2 = 0,923$, error de energía = 2,7 %. Fuente: elaboración propia.

En síntesis, la reducción de la capacidad de la red y el aumento de la densidad de colocación permitieron rescatar la reconstrucción de la fuente de Arrieta, llevando el error de energía del 11 % a cerca del 3 %, una mejora sustantiva aunque todavía lejana de la recuperación casi exacta de las fuentes bien identificadas. La necesidad de ese ajuste, y la imposibilidad de guiarlo mediante cantidades medibles, son limitaciones intrínsecas del enfoque ante la escala temporal extensa de la curva de hidratación, y se retoman en la discusión.

4.3.6. Síntesis comparativa entre experimentos

La lectura transversal de los experimentos de la fase experimental revela dos regímenes de comportamiento netamente distintos, gobernados ante todo por la identificabilidad de la fuente. La Tabla 4.10 reúne un conjunto representativo de casos que abarca desde el mejor desempeño hasta las condiciones más degradadas.

Exp.	Fuente	Ambiente	Sens.	σ [°C]	$R^2(\dot{Q})$	E. energía [%]
1	Gauss 1	Constante	9	0	0,99999	0,11
16	Gauss 1	Constante	1	2	0,913	0,39
33	Rectangular	Constante	9	0	0,974	0,70
71	Arrieta	Constante	9	0	0,921	15,65
87	Arrieta	Senoidal ± 5 °C	9	0	0,564	34,17

Tabla 4.10: Resumen comparativo de casos representativos de la fase experimental, con arquitectura estándar. Las filas abarcan el mejor caso, la esquina de medición más degradada, una morfología no suave y la fuente de Arrieta bajo ambiente constante y bajo una oscilación amplia.

El primer régimen corresponde a las fuentes bien identificables, esto es, las gaussianas y el pulso rectangular. En él, la reconstrucción es robusta frente a la degradación de las mediciones: la energía total liberada, que es la magnitud que gobierna el agrietamiento térmico, se recupera con un error inferior al 5 % en toda la grilla de sensores y ruido y a través de las distintas morfologías, incluso en la esquina extrema de un único sensor con ruido máximo, donde la fidelidad puntual colapsa pero la energía se conserva en un 0,39 % (exp. 16). La fidelidad puntual, medida por el R^2 y el error de pico, se mantiene alta salvo en esa esquina, y el término físico de la pérdida aporta un rechazo de ruido del orden del 85 %. A lo largo de toda la campaña, además, no se observó sobreajuste: tanto la validación held-out espacial como la temporal se mantuvieron controladas en todas las configuraciones, de modo que las degradaciones observadas obedecen siempre a límites de identificabilidad y nunca a la memorización de los datos, en línea con lo establecido en el caso base (Sección 4.3.1).

El segundo régimen corresponde a la curva de hidratación de Arrieta, la fuente de mayor relevancia física y la única que se aparta de este cuadro favorable. Su escala temporal extensa la vuelve débilmente identificable, lo que limita su recuperación a un R^2 del orden de 0,92 aun en condiciones ideales de medición (exp. 71), y una oscilación ambiental amplia la degrada de forma adicional hasta un R^2 de 0,56 (exp. 87). La reducción de la capacidad de la red y el aumento de la densidad de colocación permitieron rescatar parcialmente esta reconstrucción, llevando el error de energía del 11 % a cerca del 3 % (Sección 4.3.5), pero ese ajuste no puede guiarse mediante el error del campo de temperatura, que es la única cantidad medible sin conocer la fuente real, lo que constituye la limitación de fondo del enfoque para esta clase de fuentes.

En conjunto, los factores que determinan el desempeño se ordenan con claridad. El más decisivo es la identificabilidad de la fuente, asociada a su morfología y a su escala temporal: la brecha entre las gaussianas ($R^2 \approx 0,9999$) y la curva de Arrieta ($R^2 \approx 0,92$) supera a la de cualquier otro factor. En segundo lugar, y solo para una fuente dada, la degradación de las mediciones por reducción de sensores y aumento de ruido, cuyo efecto queda acotado y solo compromete la fidelidad puntual en el extremo. En último lugar, la amplitud del ambiente, que únicamente importa cuando se vuelve grande respecto de la señal de la fuente. La conclusión global es que el método recupera de forma robusta la magnitud físicamente decisiva, la energía liberada, a través de morfologías y condiciones de medición realistas, y que su única limitación sustantiva se concentra precisamente en la fuente de mayor interés, la curva de hidratación real, por su débil identificabilidad. Este contraste con el método clásico se aborda en la Sección 4.4.

4.3.7. Robustez de la red reducida y su transferencia entre morfologías

El estudio de ablación de la Sección 4.3.5 mostró que, para la curva de Arrieta bajo condiciones de medición degradadas, reducir la capacidad de la red del campo de temperatura mejora la recuperación de la fuente. Esa observación deja abiertas dos preguntas que esta sección responde de forma directa. La primera es si la robustez frente a la cobertura de sensores y al nivel de ruido, caracterizada en la Sección 4.3.2 sobre la red estándar, se conserva al emplear la red reducida sobre la fuente de Arrieta. La segunda es si esa misma red reducida, ajustada a una fuente débilmente identificable, sigue recuperando con fidelidad las fuentes bien identificables que la red estándar ya resolvía. Para ello se adoptó como red reducida la configuración de cuatro capas y 256 unidades por capa en la red del campo de temperatura, frente a las seis capas de la configuración estándar, que en la ablación entregó la mejor reconstrucción de la fuente de Arrieta, manteniendo el resto de los hiperparámetros y la densidad de colocación de referencia. El detalle numérico de las corridas se reporta en el Anexo D. Las Figuras 4.22, 4.23 y 4.24 comparan la red reducida sobre la fuente de Arrieta con ambiente constante, en un conjunto representativo de puntos de la grilla de cobertura de sensores y nivel de ruido, frente a la red estándar como referencia. La lectura no es la de una mejora unifor-

me, sino la de un compromiso entre descriptores. La energía total liberada, magnitud que gobierna el agrietamiento térmico, se recupera de forma sistemáticamente mejor con la red reducida (Figura 4.23): a nueve sensores sin ruido el error de energía baja del 15,65 % al 5,48 %, y en la esquina extrema de un único sensor con ruido máximo cae del 78,46 % al 22,35 %. El coeficiente de determinación de la fuente, en cambio, se comporta de manera opuesta en el caso bien informado (Figura 4.22): a nueve sensores sin ruido desciende de $R^2 = 0,921$ a 0,721, de modo que la red reducida ajusta peor la forma instantánea de la curva aun cuando recupera mejor su integral.

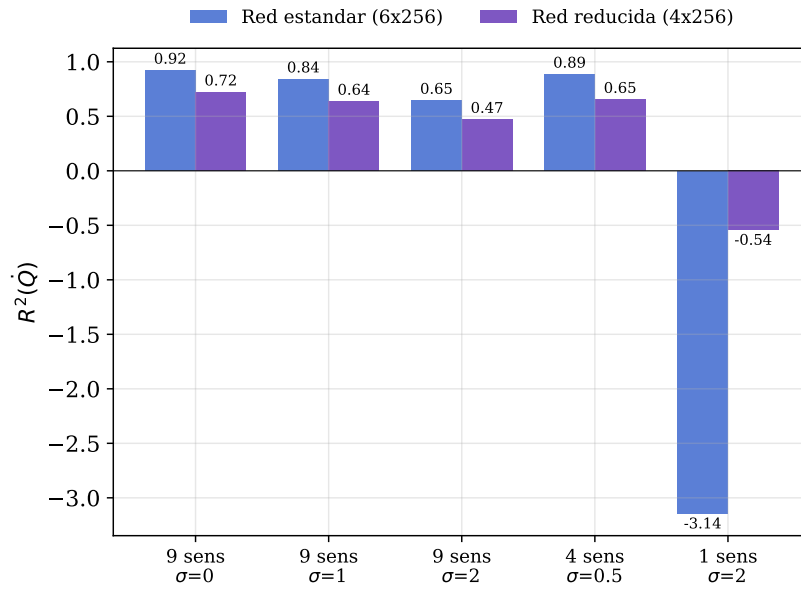


Figura 4.22: Fuente de Arrieta (ambiente constante): coeficiente de determinación de la fuente recuperada, red reducida (cuatro capas) frente a la red estándar (seis capas), en puntos representativos de la grilla de sensores y ruido. Fuente: elaboración propia.

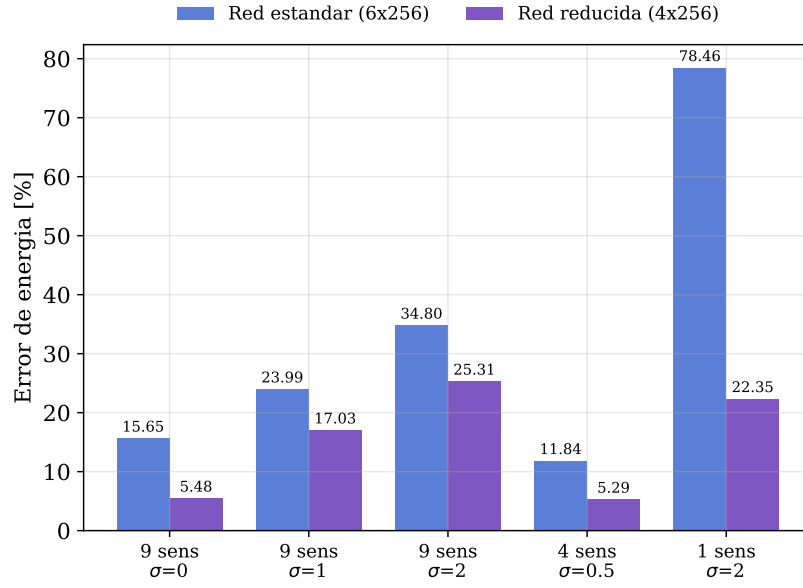


Figura 4.23: Fuente de Arrieta (ambiente constante): error de energía de la fuente recuperada, red reducida frente a red estándar. Fuente: elaboración propia.

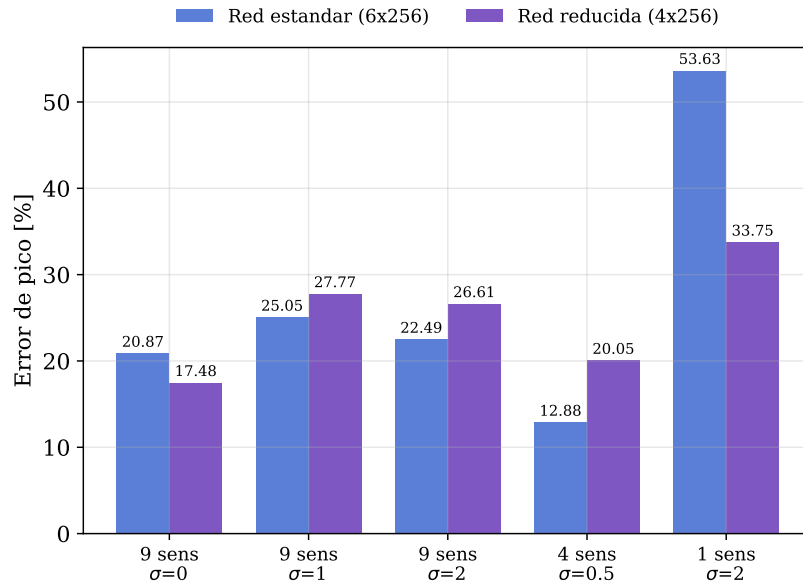


Figura 4.24: Fuente de Arrieta (ambiente constante): error de pico de la fuente recuperada, red reducida frente a red estándar. Fuente: elaboración propia.

Este contraste admite una lectura coherente con el carácter mal condicionado del problema inverso, ya establecido en la Sección 4.3.5. Cuando la información es abundante, esto es, nueve sensores limpios, la red estándar, de mayor capacidad, dispone de la li-

bertad necesaria para seguir el transitorio de la fuente y alcanza un R^2 alto, mientras que la regularización implícita de la red reducida la empuja hacia una solución más suave que sacrifica forma a cambio de conservar la energía. A medida que la medición se degrada, esa misma regularización deja de ser una desventaja y se vuelve protectora: la red reducida evita el colapso que la red estándar sufre en la esquina de un sensor con ruido máximo, donde el R^2 pasa de $-3,14$ a $-0,54$ y la energía se mantiene acotada en un 22,35 % frente al 78,46 %. El error del campo de temperatura permanece, en todos los casos, en el mismo orden que el de la red estándar, lo que confirma que la sensibilidad se concentra en el problema inverso y no en el ajuste de la temperatura, en línea con lo observado en la ablación de arquitectura. Queda por comprobar si la red reducida, ajustada a la fuente más difícil, conserva la fidelidad sobre las fuentes que la configuración estándar ya resolvía. Las Figuras 4.25, 4.26 y 4.27 responden afirmativamente. La gaussiana se recupera con una fidelidad prácticamente idéntica, con un R^2 de 0,99995 frente al 0,99999 de la red estándar y un error de energía del 0,04 % frente al 0,11 %, y el pulso rectangular no solo se mantiene sino que mejora de forma apreciable: su R^2 sube de 0,974 a 0,987 y el error del campo de temperatura se reduce a la mitad, del 0,121 al 0,067 °C. La red reducida, por tanto, no degrada las morfologías bien identificables.

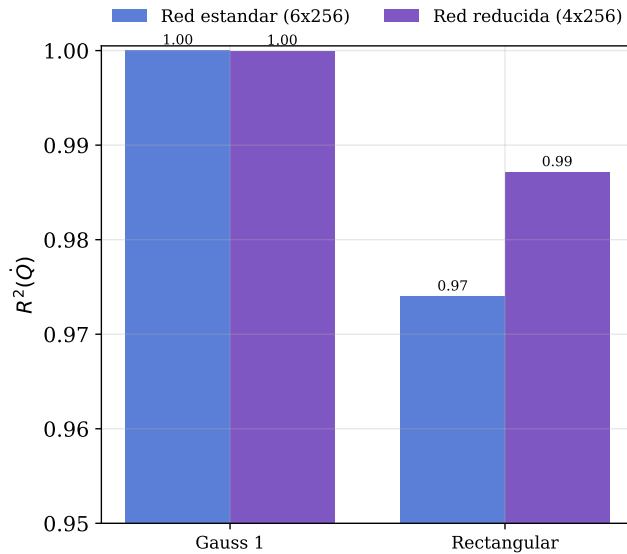


Figura 4.25: Fuentes bien identificables (nueve sensores, sin ruido, ambiente constante): coeficiente de determinación de la fuente, red reducida frente a red estándar, en eje recortado para apreciar la diferencia. Fuente: elaboración propia.

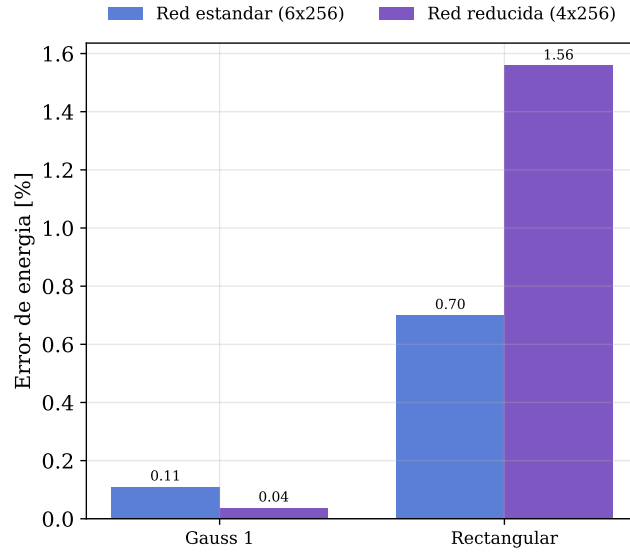


Figura 4.26: Fuentes bien identificables: error de energía de la fuente recuperada, red reducida frente a red estándar. Fuente: elaboración propia.

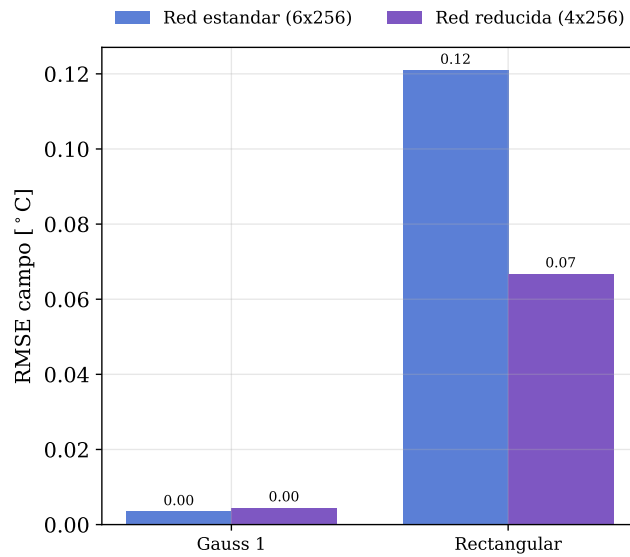


Figura 4.27: Fuentes bien identificables: RMSE del campo de temperatura (PINN vs FEM), red reducida frente a red estándar. Fuente: elaboración propia.

Los dos experimentos, leídos juntos, matizan la limitación planteada en la Sección 4.3.5 acerca de la inexistencia de una arquitectura óptima única. Una sola configuración reducida recupera con fidelidad casi exacta las gaussianas, mejora el pulso rectangular y, sobre la curva de Arrieta, recupera mejor la energía liberada y resiste mejor las condiciones de medición más degradadas que la red estándar. El precio de esa robustez es

una menor fidelidad de forma sobre la curva de Arrieta cuando la medición es abundante y limpia, donde la red estándar conserva un R^2 más alto. La elección entre ambas configuraciones no es, por tanto, indiferente, sino que depende del descriptor que se priorice: la energía liberada y la robustez favorecen la red reducida, mientras que la fidelidad de la forma instantánea en condiciones ideales favorece la red estándar. Como la energía es la magnitud que gobierna el agrietamiento térmico, y como la robustez frente a la degradación de las mediciones es la propiedad de mayor relevancia práctica en un ensayo real, la red reducida constituye la opción preferible para la aplicación, sin perjuicio de las fuentes bien identificables.

4.4. Discusión

Los resultados de la fase experimental permiten situar el enfoque basado en PINNs frente al método clásico de calibración inversa que antecede a este trabajo (Arrieta Costa, 2025), no tanto en términos de una competencia directa de exactitud sino de las capacidades estructurales que cada uno aporta al problema. Este contraste corresponde a los dos métodos del problema inverso de la Figura 1.2: la PINN, sin forma funcional impuesta ni malla, frente al enfoque clásico, que combina una simulación por elementos finitos con un optimizador sobre una forma funcional fija. La contribución central que los experimentos sostienen es la identificación de la curva de generación de calor a partir de mediciones de temperatura, bajo la condición de borde convectiva realista, sin imponer una forma funcional sobre la fuente. La demostración más nítida de esta capacidad es el pulso rectangular (Sección 4.3.4): una morfología discontinua, ajena por completo a la cinética de hidratación, que la red recupera en sus magnitudes integrales sin asumir estructura alguna y que un método basado en una familia paramétrica fija no podría siquiera representar. Esta identificación corresponde, además, a una reconstrucción genuina del campo y no a un ajuste memorizado de los datos (Sección 4.3.1), lo que respalda la fiabilidad de la fuente recuperada.

Sobre esta base, el enfoque aborda de manera natural las tres limitaciones de los métodos clásicos identificadas en la revisión bibliográfica. La primera es la imposición de una forma funcional: mientras la calibración clásica restringe la curva a una familia cinética predefinida, que en el propio trabajo de (Arrieta Costa, 2025) debió corregirse con un

término adicional por tramos para ajustar la fase inicial, la red recupera morfologías diversas, de gaussianas suaves a un pulso discontinuo, sin esa restricción. La segunda es la dependencia de una malla: la PINN identifica la fuente sin discretizar el dominio, de modo que es, por construcción, un método sin malla, lo que en principio facilita la transferencia a otras geometrías de probeta sin necesidad de remallar, aunque dicha transferencia no se evaluó en este trabajo. La tercera es el costo de anidar una simulación completa dentro de cada iteración del optimizador: aquí el campo de temperatura y la fuente se aprenden de forma simultánea en una única optimización.

En términos de cómputo, cada identificación inversa se entrenó en una única GPU NVIDIA GeForce RTX 4060 Ti, con 40 000 pasos de optimización y sin refinamiento L-BFGS, en una mediana de 17,7 min por corrida, con un rango de 9,9 a 64,0 min sobre las 111 corridas de la campaña, cuyo detalle se reporta en la Tabla D.7 del Anexo D. A modo de referencia de orden de magnitud, el procedimiento clásico de calibración inversa que antecede a este trabajo (Arrieta Costa, 2025) requiere del orden de varias horas (aproximadamente ocho) para recuperar una curva, dado que anida una simulación FEM completa en cada iteración del optimizador; esta cifra, no obstante, proviene de una configuración de hardware distinta y no fue medida en el presente trabajo, por lo que debe leerse como una indicación cualitativa del costo del enfoque anidado y no como una comparación controlada de rendimiento.

A estos beneficios estructurales se suma un desempeño práctico favorable: la energía total liberada, que es la magnitud que gobierna el agrietamiento térmico, se recupera con un error de pocos puntos porcentuales en todo el rango realista de condiciones de medición, y el residual de la ecuación actúa como un regularizador que rechaza del orden del 85 % del ruido (Sección 4.3.2), una propiedad valiosa al trabajar con los registros de un calorímetro de bajo costo.

No obstante, los resultados también delimitan con honestidad el alcance del método, y conviene leerlos como un contraste complementario y no como una superación del enfoque clásico. La flexibilidad de la PINN, que es su mayor virtud, es también el origen de su principal limitación. La curva de hidratación real, de escala temporal extensa, constituye un problema inverso débilmente identificable, y la ausencia de una forma funcional deja a la red sin un apriori fuerte que regularice esa indeterminación, lo que explica que su recuperación se degradara y exigiera un control explícito de la

capacidad de la red (Sección 4.3.5). El estudio de la red reducida (Sección 4.3.7) precisa el alcance de ese control de capacidad y matiza la afirmación, hecha en la Sección 4.3.5, de que no existe una arquitectura óptima única. La regularización se ejerce sobre la red del campo de temperatura, no sobre la red que representa la fuente: al limitar la capacidad de la primera, el campo queda empujado hacia una solución más suave que solo resulta compatible con una fuente más plausible, de modo que la mejora de la fuente se obtiene de forma indirecta. Aplicada al conjunto de morfologías, una única red reducida recupera con fidelidad casi exacta las gaussianas, mejora incluso el pulso rectangular y, sobre la curva de Arrieta, baja el error de energía del 15,65 % al 5,48 % a cobertura máxima y evita el colapso de la red estándar en las esquinas de medición más degradadas. El precio de esa robustez es una menor fidelidad de la forma instantánea de la curva de Arrieta cuando la medición es abundante y limpia, donde la red estándar conserva un coeficiente de determinación más alto. La elección entre ambas configuraciones no es, por tanto, libre de costo, sino que depende del descriptor que se priorice. Dado que la energía liberada es la magnitud que gobierna el agrietamiento térmico, y que la robustez frente a la degradación de las mediciones es la propiedad de mayor valor práctico en un ensayo real, la red reducida resulta preferible para la aplicación, sin perjuicio de las fuentes bien identificables. Esto no elimina la limitación de fondo, ya que la calidad de la fuente sigue desacoplada del error del campo, que es la única cantidad medible sin conocer el ground truth, pero acota su impacto: una sola arquitectura, fijada de antemano, ofrece un comportamiento robusto a través de las morfologías y condiciones ensayadas, en lugar de requerir un ajuste guiado por información no disponible. Vista así, la forma funcional del método clásico no es únicamente una restricción: es precisamente un *a priori* físico que regulariza el problema mal condicionado y le confiere robustez justamente para la curva real. Las dos aproximaciones resultan, por tanto, complementarias. El método clásico es sólido cuando la fuente sigue la cinética supuesta, y su estructura paramétrica lo protege de la indeterminación; el enfoque basado en PINNs es ventajoso cuando la morfología es desconocida, inusual o se aparta de esa cinética, y cuando la flexibilidad geométrica o la robustez al ruido resultan determinantes.

De este contraste se desprende el ámbito en que el enfoque propuesto resulta más competitivo: los escenarios exploratorios o no estándar, esto es, mezclas o condiciones

de curado cuyo comportamiento térmico se desvíe de la cinética habitual, geometrías nuevas o mediciones ruidosas, donde la capacidad de recuperar la fuente sin un molde predefinido y sin una malla aporta un valor que el método paramétrico no ofrece. En conjunto, el trabajo deja propuesta una tecnología útil y viable para el área: una herramienta de identificación inversa sin malla y sin forma funcional, con un dominio de robustez caracterizado, las fuentes bien identificables bajo condiciones de medición realistas, y con una limitación igualmente delimitada, la débil identificabilidad de las fuentes de escala temporal larga, que señala con precisión hacia dónde debe dirigirse el trabajo futuro. Esta propuesta se construye directamente sobre la metodología de calibración inversa de (Arrieta Costa, 2025), de la que toma su modelo de elementos finitos como referencia y su curva de hidratación como ground truth, y la comparación debe entenderse en ese espíritu: como una alternativa que amplía el conjunto de herramientas disponibles para el problema, antes que como un reemplazo de un método que ha demostrado ser efectivo.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones teóricas

Este trabajo demostró que el marco de las PINNs permite resolver el problema inverso de identificar la curva de generación de calor de hidratación, dependiente del tiempo, bajo la condición de borde convectiva de Robin y a partir de mediciones de temperatura escasas, sin imponer una forma funcional sobre la fuente, validando los objetivos planteados. En términos de la Figura 1.2, esto confirma que la PINN puede ocupar el lugar del método del problema inverso, recuperando $\dot{Q}(t)$ de forma validada frente a las referencias analítica y de elementos finitos. La validación incremental de la fase exploratoria estableció que la condición de Robin se impone de forma estable y resulta, de hecho, más tratable que la idealización de Dirichlet, y que la maquinaria de inversión recupera de manera robusta una fuente tratada como objetivo ciego mientras el problema permanece determinado.

La conclusión teórica central es que la dificultad del problema inverso está gobernada por la identificabilidad de la fuente, asociada a su morfología y sobre todo a su escala temporal, antes que por la degradación de las mediciones. Para fuentes débilmente identificables, de escala temporal extensa, el mal condicionamiento se manifiesta de una manera contraria a la práctica habitual del aprendizaje profundo: aumentar la capacidad de la red del campo de temperatura empeora la fuente recuperada, de modo que su reducción opera como una regularización implícita. Esta regularización no es específica de un caso, sino que se confirmó al transferir una única red reducida a las

distintas morfologías: la misma configuración conserva la fidelidad casi exacta de las fuentes bien identificables y mejora la energía recuperada de la curva de Arrieta. Es determinante, además, que este fallo sea de identificabilidad y no de sobreajuste, lo que se verificó de forma transversal en toda la campaña: el campo de temperatura generaliza a puntos no observados en todas las configuraciones, y la solución degradada es consistente con los datos y con la física, pero corresponde a una fuente equivocada. Una conclusión adicional es que la integral de la fuente, esto es, la energía total liberada, constituye la magnitud robustamente identificable, recuperada con un error de pocos puntos porcentuales incluso cuando la reconstrucción puntual se degrada, mientras que los rasgos puntuales agudos, como el valor de pico o los flancos discontinuos, son los frágiles.

5.2. Conclusiones prácticas

Para las fuentes bien identificables y bajo condiciones de medición realistas, con pocos sensores y ruido instrumental, el método recupera de forma robusta el calor de hidratación total liberado, que es la magnitud que gobierna el agrietamiento térmico. Esta robustez de la energía se extiende, con la red reducida, también a la curva de hidratación real, cuyo error de energía baja a pocos puntos porcentuales aun cuando su forma instantánea siga siendo difícil de fijar. A ello se suma que el residual de la ecuación actúa como un regularizador que rechaza del orden del 85 % del ruido de las mediciones, una propiedad de valor directo al trabajar con los registros de un calorímetro de bajo costo. El enfoque es, además, un método sin malla y sin forma funcional impuesta, lo que le confiere valor en escenarios exploratorios o no estándar: morfologías desconocidas, mezclas o condiciones de curado que se aparten de la cinética habitual, y geometrías nuevas. La demostración práctica más clara de esta flexibilidad es la recuperación de un pulso rectangular discontinuo, una morfología que un método basado en una familia paramétrica fija no podría siquiera representar.

La principal limitación práctica es la propia curva de hidratación real. Su escala temporal extensa la vuelve débilmente identificable, y su recuperación exigió reducir la capacidad de la red del campo de temperatura. Conviene precisar el alcance de esta limitación a la luz del estudio de la red reducida: aunque la calidad de la fuente no

puede optimizarse caso a caso mediante cantidades medibles, dado que la fuente verdadera es desconocida, una única arquitectura reducida fijada de antemano ofrece un comportamiento robusto a través de las morfologías y condiciones ensayadas, de modo que la elección de la red no requiere conocer el ground truth. Sobre esa configuración, la energía liberada de la curva de Arrieta se recupera con un error de pocos puntos porcentuales. Aun así, la fidelidad de la forma instantánea de esta curva permanece por debajo de la de las fuentes bien identificables, por lo que el método clásico de calibración inversa sigue siendo una opción robusta cuando la fuente sigue la cinética supuesta. Ambos enfoques deben entenderse como complementarios antes que como sustitutos: el método clásico aporta un apriori físico que regulariza el problema, y el enfoque basado en PINNs aporta flexibilidad cuando la forma de la fuente es incierta.

5.3. Síntesis cuantitativa y comparación con el método clásico

La Tabla 5.1 reúne las métricas cuantitativas definidas en la Sección 3.8.2 para los casos representativos de la fase experimental, desde el mejor desempeño hasta la curva de hidratación real bajo las condiciones más exigentes. Estas cifras son las que sostienen, en términos numéricos, las conclusiones anteriores: el error de energía se mantiene acotado en todo el rango de condiciones ensayadas, mientras que el coeficiente de determinación y el error de pico se degradan de forma más marcada cuando la fuente es débilmente identificable.

Caso	Sensores	σ [°C]	$R^2(\dot{Q})$	Error energía [%]	Error pico [%]
Gauss 1, caso base	9	0	0.99999	0.11	0.46
Gauss 1, peor caso	1	2	0.913	0.39	45.33
Rectangular, caso base	9	0	0.974	0.70	0.17
Arrieta, ambiente cte.	9	0	0.921	15.65	20.87
Arrieta, red reducida	9	0	0.721	5.48	17.48
Arrieta, ambiente ± 5 °C	9	0	0.564	34.17	29.09

Tabla 5.1: Síntesis cuantitativa del desempeño de la PINN en la identificación inversa de $\dot{Q}(t)$, para casos representativos de la fase experimental (condición de Robin). Métricas definidas en la Sección 3.8.2.

Esta tabla no incluye una columna equivalente para el método de calibración inversa

de (Arrieta Costa, 2025), porque ese trabajo no reporta las mismas métricas sobre la curva reconstruida. Su validación interna, descrita en su Anexo C, cuantifica el error relativo de los parámetros cinéticos (C, a, b, τ_0) recuperados frente a casos sintéticos y frente a datos con ruido gaussiano, no el error de energía, de pico o el R^2 de la curva $\dot{Q}(t)$ en sí. Construir una comparación numérica directa exigiría, por tanto, asumir una equivalencia entre ambas métricas que no está justificada: un error de 10 % en el parámetro b de una forma funcional no se traduce de manera directa en un error de 10 % en la energía liberada por esa curva. Por esta razón, el contraste entre ambos enfoques se desarrolla aquí en términos cualitativos, que es el plano en el que la comparación resulta honesta y donde se concentran las diferencias relevantes para la pregunta de investigación.

Las ventajas de las PINNs frente al método clásico se concentran en la ausencia de supuestos sobre la forma de la fuente. Mientras la calibración de Arrieta restringe $\dot{Q}(t)$ a una familia paramétrica fija, y debió incluso ampliarse con un término adicional por tramos para corregir la subestimación del calor en la fase inicial, la red recupera morfologías tan distintas como una gaussiana suave o un pulso rectangular discontinuo sin asumir ninguna estructura previa, algo que la formulación cinética de Arrieta no podría representar aunque se afinaran sus parámetros. A esto se suma que el método es libre de malla, de modo que la identificación no depende de discretizar el dominio ni de remallar al cambiar de geometría, y que el campo de temperatura y la fuente se aprenden en una única optimización conjunta en lugar de anidar una simulación completa por elementos finitos dentro de cada iteración de un optimizador externo. El residual de la ecuación actúa además como un filtro físico del ruido de medición, rechazando una fracción considerable de las perturbaciones aleatorias antes de que contaminen la fuente recuperada.

La principal desventaja aparece justamente donde el método clásico es más fuerte: cuando la fuente sigue una cinética conocida y razonablemente bien comportada, la forma funcional impuesta por Arrieta actúa como un regularizador explícito que la PINN no posee de manera nativa. Para la curva de hidratación real, cuya escala temporal extensa la vuelve débilmente identificable, la red necesita un ajuste deliberado de su capacidad para evitar que el problema mal condicionado la lleve a una fuente plausible pero incorrecta, mientras que el optimizador de Arrieta no enfrenta esa ambigüedad porque ya

parte de una forma que se ajusta razonablemente bien a la cinética de hidratación. En ese régimen, la fidelidad puntual de la PINN queda por debajo de lo que cabría esperar de un método que incorpora ese conocimiento previo desde el inicio. Los dos enfoques resultan, en consecuencia, complementarios y no sustitutos: el método clásico es preferible cuando la mezcla sigue la cinética supuesta y se dispone de tiempo para anidar la optimización, y la PINN aporta valor cuando la morfología de la fuente es incierta, la geometría cambia con frecuencia, o el ruido de medición es una preocupación central.

5.4. Direcciones futuras

El trabajo delimita con precisión hacia dónde conviene dirigir los esfuerzos siguientes. La línea más relevante es atacar la débil identificabilidad de las fuentes de escala temporal larga mediante esquemas híbridos, que combinen un apriori físico suave, como una regularización de tipo cinético, con la flexibilidad de la red, de modo de regularizar la indeterminación sin renunciar a la capacidad de capturar desviaciones de la forma supuesta. Estrechamente ligado a lo anterior está el desarrollo de un criterio de selección de la arquitectura y la regularización que no dependa del ground truth, ya que el error del campo de temperatura, la única cantidad medible, está desacoplado de la calidad de la fuente.

En el plano aplicado, conviene poner a prueba de forma explícita la ventaja de ser un método sin malla, evaluando la transferencia a otras geometrías de probeta, que aquí no se ensayó. Como extensiones naturales del problema se cuentan la identificación de fuentes que varíen también en el espacio o que combinen varios compuestos, y la mejora de la estabilidad de la convergencia y del criterio de selección del modelo, cuyo comportamiento oscilatorio se observó en los casos más exigentes.

5.5. Comentarios finales

En síntesis, este trabajo establece a las PINNs como una herramienta viable y complementaria para la identificación inversa de la curva de generación de calor de hidratación, construida directamente sobre la metodología de calibración inversa que la antecede permitiendo validar la hipótesis planteada al comienzo del trabajo. La contribución amplía

el conjunto de herramientas disponibles para el problema con un enfoque sin malla y sin forma funcional impuesta, cuyo dominio de robustez quedó caracterizado y cuya principal limitación, la débil identificabilidad de las fuentes de escala temporal larga, quedó igualmente delimitada y señala con claridad el camino del trabajo futuro.

Nomenclatura

PINN : Physics-Informed Neural Network / Red Neuronal Informada por la Física
PDE : Partial Differential Equation / Ecuación Diferencial Parcial
FEM : Finite Element Method / Método de Elementos Finitos
MLP : Multilayer Perceptron / Perceptrón Multicapa
NTK : Neural Tangent Kernel / Núcleo Tangente Neuronal
RWF : Random Weight Factorization / Factorización Aleatoria de Pesos
RMSE : Root Mean Square Error / Raíz del Error Cuadrático Medio
JAX-PI : JAX Physics-Informed framework / Framework de PINNs en JAX
OpenSees : Open System for Earthquake Engineering Simulation / Sistema Abierto para Simulación en Ingeniería Sísmica
STKO : Scientific ToolKit for OpenSees / Conjunto de Herramientas Científicas para OpenSees
ACI : American Concrete Institute / Instituto Americano del Hormigón
ICH : Chilean Institute of Cement and Concrete / Instituto del Cemento y del Hormigón de Chile
GPU : Graphics Processing Unit / Unidad de Procesamiento Gráfico
RAM : Random Access Memory / Memoria de Acceso Aleatorio
 T : Temperature field / Campo de temperatura
 $\dot{Q}(t)$: Hydration heat generation rate (source term) / Tasa de generación de calor de hidratación (término fuente)
 $\vec{q}$: Heat flux vector / Vector de flujo de calor
 t : Time / Tiempo
 r, z : Radial and axial coordinates / Coordenadas radial y axial
 k : Thermal conductivity / Conductividad térmica
 ρ : Density / Densidad

c_p : Specific heat / Calor específico
 α : Thermal diffusivity, $\alpha = k/(\rho c_p)$ / Difusividad térmica
 β : Convective heat transfer coefficient (Robin) / Coeficiente de transferencia de calor por convección (Robin)
 R, H : Specimen radius and height / Radio y altura de la probeta
 $T_{\max}$: Time horizon of the experiment / Horizonte temporal del experimento
 T_{env} : Ambient temperature / Temperatura ambiente
 T_0 : Initial temperature / Temperatura inicial
 T_s : Prescribed surface temperature (Dirichlet) / Temperatura de superficie prescrita (Dirichlet)
 q_s : Prescribed surface heat flux (Neumann) / Flujo de calor prescrito en la superficie (Neumann)
 $\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}$: Dimensionless coordinates and time / Coordenadas y tiempo adimensionales
 θ : Dimensionless temperature field / Campo de temperatura adimensional
 θ_{env} : Dimensionless ambient temperature / Temperatura ambiente adimensional
 $S(\bar{t})$: Dimensionless source term / Término fuente adimensional
 Fo_R, Fo_H : Radial and axial Fourier numbers / Números de Fourier radial y axial
 Bi_R, Bi_H : Radial and axial Biot numbers / Números de Biot radial y axial
 u_θ : Temperature network with parameters θ / Red de temperatura con parámetros θ
 s_ϕ : Source network with parameters ϕ / Red de fuente con parámetros ϕ
 $\mathcal{L}$: Loss function / Función de pérdida
 $\mathcal{L}_r, \mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{bc}, \mathcal{L}_{ic}$: Residual, data, boundary-condition and initial-condition loss terms / Términos de pérdida de residual, datos, condición de borde y condición inicial
 $\lambda_r, \lambda_d, \lambda_{bc}, \lambda_{ic}$: Loss term weights / Pesos de los términos de pérdida
 J_0, J_1 : Bessel functions of the first kind, orders 0 and 1 / Funciones de Bessel de primera especie, órdenes 0 y 1
 β_n : Radial eigenvalues / Autovalores radiales
 γ_m : Axial eigenvalues / Autovalores axiales
 λ_{nm} : Modal decay rate / Tasa de decaimiento modal
 N : Number of sensors / Número de sensores
 σ : Standard deviation of measurement noise / Desviación estándar del ruido de medición

ΔT : Thermal range of a case / Rango térmico de un caso

R^2 : Coefficient of determination / Coeficiente de determinación

$\alpha(t)$: Degree of hydration / Grado de hidratación

$Q_{i,\max}$: Maximum hydration heat of compound i / Calor máximo de hidratación del compuesto i

Referencias

- American Concrete Institute (2005). *Guide to Mass Concrete (ACI 207.1R-05)*. Farmington Hills, MI: American Concrete Institute.
- American Concrete Institute (2021). *Guide to Mass Concrete (ACI 207.1R-21)* (Revised ed.). Farmington Hills, MI: ACI Committee 207, American Concrete Institute.
- Aniskin, N. & Nguyen, T. C. (2019). Influence factors on the temperature field in a mass concrete. *E3S Web of Conferences*, 97, 05021.
- Arrieta Costa, B. J. (2025). Predicción y mitigación de agrietamiento en hormigones masivos debido a calor de hidratación en edades tempranas. Master's thesis, Universidad de los Andes, Santiago, Chile.
- Billah, M. M., Khan, A. I., Liu, J., & Dutta, P. (2023). Physics-informed deep neural network for inverse heat transfer problems in materials. *Materials Today Communications*, 35, 106336.
- Cengel, Y. A. & Castellanos, J. (2007). *Transferencia de calor y masa: un enfoque práctico*. McGraw-Hill.
- Fuentes Ciocca, E. (2025). Diseño de un dispositivo para la obtención de curva de calor por hidratación del hormigón. Master's thesis, Universidad de los Andes, Santiago, Chile.
- Hadamard, J. (1923). *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven: Yale University Press.
- He, Z., Ni, F., Wang, W., & Zhang, J. (2021). A physics-informed deep learning method for solving direct and inverse heat conduction problems of materials. *Materials Today Communications*, 28, 102719.
- Instituto del Cemento y del Hormigón de Chile (2019). *Especificación para Hormigón Masivo Estructural*. Santiago, Chile: Instituto del Cemento y del Hormigón de Chile.

- Li, K. & Li, L. (2019). Crack-altered durability properties and performance of structural concretes. *Cement and Concrete Research*, 124, 105811.
- Mehta, P. K. & Monteiro, P. J. M. (2014). *Concrete: Microstructure, Properties, and Materials*. McGraw-Hill Education.
- Palar, P. S., Aziz, M. A., Zuhail, L. R., Sambegoro, P. L., & Dung, D. V. (2023). Using physics-informed neural networks to solve inverse heat conduction problems. In *AIAA SciTech 2023 Forum*.
- Rahaman, N., Baratin, A., Arpit, D., Draxler, F., Lin, M., Hamprecht, F. A., Bengio, Y., & Courville, A. (2019). On the spectral bias of neural networks. *Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning (PMLR)*, 97, 5301–5310.
- Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707.
- Serth, R. W. & Lestina, T. (2014). *Process Heat Transfer: Principles, Applications and Rules of Thumb*. Elsevier Science.
- Swaddiwudhipong, S., Wu, H., & Zhang, M. H. (2003). Numerical simulation of temperature rise of high-strength concrete incorporating silica fume and superplasticiser. *Advances in Cement Research*, 15(4), 161–169.
- Tancik, M., Srinivasan, P. P., Mildenhall, B., Fridovich-Keil, S., Raghavan, N., Singhal, U., Ramamoorthi, R., Barron, J. T., & Ng, R. (2020). Fourier features let networks learn high frequency functions in low dimensional domains. In *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, volume 33, (pp. 7537–7547).
- Wang, C., Jin, Z., Pang, B., Li, J., Dong, W., & Chen, R. (2023). Experimental study of delayed ettringite formation under geothermal high-temperature environment. *Journal of Building Engineering*, 78, 107519.
- Wang, S., Sankaran, S., & Perdikaris, P. (2022). Respecting causality is all you need for training physics-informed neural networks. *arXiv preprint arXiv:2203.07404*.

- Wang, S., Sankaran, S., Wang, H., & Perdikaris, P. (2023). An expert’s guide to training physics-informed neural networks. *arXiv preprint arXiv:2308.08468*.
- Wang, S., Teng, Y., & Perdikaris, P. (2020). Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 43(5), A3055–A3081.
- Wang, S., Wang, H., & Perdikaris, P. (2020). On the eigenvector bias of fourier feature networks: From regression to solving multi-scale pdes with physics-informed neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 384, 113938.
- Wang, S., Wang, H., Seidman, J. H., & Perdikaris, P. (2022). Random weight factorization improves the training of continuous neural representations. *arXiv preprint arXiv:2210.01274*.
- Wang, S., Yu, X., & Perdikaris, P. (2022). When and why pinns fail to train: A neural tangent kernel perspective. *Journal of Computational Physics*, 449, 110768.
- Wu, C., Zhu, M., Tan, Q., Kartha, Y., & Lu, L. (2022). A comprehensive study of non-adaptive and residual-based adaptive sampling for physics-informed neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 403, 115671.

Apéndice A

Adimensionalización y normalizaciones

Este anexo desarrolla la formulación adimensional empleada en la Sección 3.1.2 (formulación adimensional del problema), cuyo resultado se enunció allí en la ecuación (3.2) sin detallar su derivación. Se parte de la ecuación de calor dimensional en coordenadas cilíndricas, se introduce el escalado de variables y se obtiene la forma adimensional sobre el dominio unitario, incluyendo la multiplicación por $\bar{r}$ que regulariza la singularidad de coordenadas en el eje. A continuación se adimensionalizan las condiciones de borde de Robin, de donde emergen los números de Biot, y se documenta el escalado de la temperatura y de la fuente que estabiliza el entrenamiento.

A.1. Ecuación de partida y supuestos

El fenómeno se modela mediante la ecuación de Fourier de conducción de calor con generación interna, en coordenadas cilíndricas y bajo el supuesto de axisimetría, de modo que el campo no depende de la coordenada angular, $T = T(t, r, z)$. Con propiedades del material constantes y uniformes, la ecuación es

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{Q}(t), \quad (\text{A.1})$$

donde ρ es la densidad, c_p el calor específico, k la conductividad térmica y $\dot{Q}(t)$ el término fuente, supuesto uniforme en el espacio y dependiente solo del tiempo. El ope-

rador laplaciano axisimétrico de (A.1) proviene de desarrollar $\nabla \cdot (k \nabla T)$ con k constante, recordando que en cilíndricas la parte radial es $\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r T) = \partial_{rr} T + \frac{1}{r} \partial_r T$. Conviene introducir la difusividad térmica

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \quad (\text{A.2})$$

con la que, dividiendo (A.1) por ρc_p , la ecuación adopta la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p}. \quad (\text{A.3})$$

A.2. Escalado de las variables

El objetivo del escalado es llevar el problema a un dominio unitario $[0, 1]^3$ y a campos de orden unidad, de manera que las entradas y la salida de la red operen en magnitudes comparables y los gradientes se mantengan bien condicionados durante el entrenamiento. Sea R el radio de la probeta, H su altura y $T_{\max}$ el horizonte temporal del experimento. Se definen las variables adimensionales

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T_{\max}}, \quad (\text{A.4})$$

de modo que $\bar{r}, \bar{z}, \bar{t} \in [0, 1]$. La temperatura se representa mediante un campo escalado θ de orden unitario; basta con escribir $T = T_{\text{sc}} \theta + T_{\text{ref}}$ para alguna escala térmica T_{sc} y un desplazamiento T_{ref} , ambos constantes. Como (A.3) es lineal en T y sus derivadas espaciales y temporal son homogéneas en cualquier corrimiento constante, el término T_{ref} se cancela en todas las derivadas y la escala T_{sc} factoriza de manera uniforme; por ello el escalado de temperatura no altera la estructura de la ecuación interior y se difiere su discusión a la Sección A.5. En lo que sigue se trabaja directamente con θ .

Por la regla de la cadena, cada derivada introduce el factor de escala de su variable:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{T_{\max}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (\text{A.5})$$

y, para las segundas derivadas, $\partial_{rr} = R^{-2} \partial_{\bar{r}\bar{r}}$ y $\partial_{zz} = H^{-2} \partial_{\bar{z}\bar{z}}$.

A.3. Forma adimensional de la ecuación interior

Sustituyendo (A.5) en (A.3) y trabajando sobre el campo escalado θ se obtiene

$$\frac{1}{T_{\max}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} = \alpha \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{R^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} \right) + \frac{\dot{Q}(t)}{\rho c_p T_{\text{sc}}}, \quad (\text{A.6})$$

donde se usó que $\frac{1}{r} \partial_r = \frac{1}{R\bar{r}} \cdot \frac{1}{R} \partial_{\bar{r}} = R^{-2} \bar{r}^{-1} \partial_{\bar{r}}$. Multiplicando (A.6) por $T_{\max}$ y agrupando los coeficientes adimensionales aparecen de forma natural los *números de Fourier*

$$\text{Fo}_R = \frac{\alpha T_{\max}}{R^2}, \quad \text{Fo}_H = \frac{\alpha T_{\max}}{H^2}, \quad (\text{A.7})$$

que comparan el tiempo característico de difusión en cada dirección con el horizonte temporal del experimento, y controlan respectivamente la difusión radial y axial. Definiendo además la fuente adimensional

$$S(\bar{t}) = \frac{T_{\max}}{\rho c_p T_{\text{sc}}} \dot{Q}(t), \quad (\text{A.8})$$

la ecuación queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} - \text{Fo}_R \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right) - \text{Fo}_H \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} - S(\bar{t}) = 0. \quad (\text{A.9})$$

A.3.1. Regularización de la singularidad en el eje

El término $\frac{1}{\bar{r}} \partial_{\bar{r}} \theta$ de (A.9) es singular en el eje $\bar{r} = 0$. Aunque la solución física es regular allí, la condición de simetría axial $\partial_{\bar{r}} \theta|_{\bar{r}=0} = 0$ garantiza que el cociente $\frac{1}{\bar{r}} \partial_{\bar{r}} \theta$ tiene límite finito, su evaluación numérica directa sobre puntos de colocación próximos al eje es inestable. Para evitarlo se multiplica (A.9) por $\bar{r}$, lo que elimina el denominador sin alterar el conjunto de soluciones:

$$\boxed{\bar{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} - \text{Fo}_R \left(\bar{r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right) - \text{Fo}_H \bar{r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} - \bar{r} S(\bar{t}) = 0.} \quad (\text{A.10})$$

La expresión (A.10) es la forma adimensional regularizada que se emplea como residual de la ecuación diferencial en la función de pérdida, y coincide con la ecuación (3.2) del cuerpo. En $\bar{r} = 0$ todos sus términos se anulan de forma consistente, de modo que el

residual está bien definido en todo el dominio, incluido el eje.

A.4. Adimensionalización de las condiciones de borde

Las condiciones de borde físicas se expresan en términos del flujo conductivo $-k \partial T / \partial n$ sobre cada superficie. Al escalar la coordenada normal, el factor de escala correspondiente reaparece en el flujo y da lugar a los números de Biot.

A.4.1. Condición de Robin sobre la pared lateral

Sobre la pared lateral $r = R$ (esto es, $\bar{r} = 1$), la normal exterior apunta en la dirección radial y la condición convectiva $-k \partial_r T = \beta (T - T_{\text{env}})$ se escribe, usando (A.5) y $T = T_{\text{sc}} \theta + T_{\text{ref}}$,

$$-\frac{k T_{\text{sc}}}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \Big|_{\bar{r}=1} = \beta T_{\text{sc}} (\theta - \theta_{\text{env}}), \quad (\text{A.11})$$

donde $\theta_{\text{env}} = (T_{\text{env}} - T_{\text{ref}}) / T_{\text{sc}}$ es la temperatura ambiente adimensional. Dividiendo (A.11) por $k T_{\text{sc}} / R$ y reordenando aparece el *número de Biot radial*

$$\text{Bi}_R = \frac{\beta R}{k}, \quad (\text{A.12})$$

con lo que la condición adopta su forma adimensional

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \Big|_{\bar{r}=1} + \text{Bi}_R (\theta - \theta_{\text{env}}) = 0. \quad (\text{A.13})$$

A.4.2. Condición de Robin sobre las tapas

El mismo procedimiento sobre las tapas, con la normal en la dirección axial y la escala de longitud H , define el *número de Biot axial*

$$\text{Bi}_H = \frac{\beta H}{k}. \quad (\text{A.14})$$

La diferencia entre la tapa superior y la inferior es el sentido de la normal exterior, que invierte el signo del término de flujo. Para la tapa superior $\bar{z} = 1$, con normal saliente

en $+\bar{z}$,

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=1} + \text{Bi}_H (\theta - \theta_{\text{env}}) = 0, \quad (\text{A.15})$$

y para la tapa inferior $\bar{z} = 0$, con normal saliente en $-\bar{z}$,

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} - \text{Bi}_H (\theta - \theta_{\text{env}}) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Las ecuaciones (A.13), (A.15) y (A.16) corresponden, respectivamente, a las condiciones de borde convectivas del cuerpo sobre pared, tapa superior y tapa inferior.

A.4.3. Simetría axial

Sobre el eje $\bar{r} = 0$, la axisimetría impone flujo radial nulo, que en variables adimensionales es simplemente

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=0} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Esta condición es la que asegura, como se anticipó en la Sección A.3.1, que la solución sea regular en el eje y que el residual regularizado (A.10) esté bien definido allí.

A.4.4. Casos de validación bajo Dirichlet

En los experimentos de validación con condición de Dirichlet, las superficies se fijan directamente a la temperatura ambiente adimensional,

$$\theta = \theta_{\text{env}} \quad \text{sobre pared y tapas.} \quad (\text{A.18})$$

Esta condición se recupera como caso límite de la de Robin cuando $\text{Bi} \rightarrow \infty$: al dividir (A.13) por Bi_R y hacer $\text{Bi}_R \rightarrow \infty$, el término de gradiente se desvanece y queda $\theta = \theta_{\text{env}}$, consistente con que una convección infinitamente eficiente equilibra la superficie con el ambiente de forma instantánea.

A.5. Escalado de la temperatura y de la fuente

Resta fijar la escala térmica T_{sc} y el desplazamiento T_{ref} que definen θ , así como la escala de la fuente. El desplazamiento T_{ref} se elige de modo que la condición inicial

quede normalizada; tomando $T_{\text{ref}} = T_0$, con T_0 la temperatura inicial de la probeta, la condición inicial adimensional es $\theta(\bar{r}, \bar{z}, 0) = \theta_0$, que en varios experimentos se reduce a $\theta_0 = 0$ y permite imponerla de forma exacta mediante una transformación de la salida de la red. La escala T_{sc} se elige proporcional al rango térmico observado en los datos del experimento, de manera que θ sea de orden unidad; en la fase experimental este factor se adapta automáticamente al rango de cada caso.

Fijada T_{sc} , la escala de la fuente queda determinada por (A.8): el grupo $T_{\text{max}}/(\rho c_p T_{\text{sc}})$ convierte la potencia volumétrica $\dot{Q}(t)$ en la fuente adimensional $S(\bar{t})$. En la práctica se introduce un factor de escala de fuente s_{sc} estimado a partir de la magnitud de los datos, de modo que la salida de la red de fuente opere también en valores de orden unidad; la curva física se recupera invirtiendo el escalado mediante $\dot{Q}(t) = \rho c_p T_{\text{sc}} S(\bar{t})/T_{\text{max}}$.

Apéndice B

Derivación de la solución analítica de referencia

Este anexo desarrolla la solución analítica de la ecuación de calor adimensional empleada como referencia exacta en la Sección 3.6 y en la evaluación de los casos directos bajo condición de Robin con ambiente constante. La derivación procede por separación de variables sobre el problema axisimétrico con condiciones de borde convectivas: se construye una base de autofunciones, se proyectan sobre ella la condición inicial y la fuente, y la evolución temporal de cada modo se resuelve mediante una integral de Duhamel. La exposición es resumida y se concentra en los resultados que definen la solución; se parte de la formulación adimensional regularizada obtenida en el Anexo A.

B.1. Planteamiento

Se considera la ecuación de calor adimensional sobre el dominio axisimétrico $(\bar{r}, \bar{z}) \in [0, 1]^2$, con fuente $S(\bar{t})$ uniforme en el espacio y temperatura ambiente θ_{env} constante:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} = \text{Fo}_R \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right) + \text{Fo}_H \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} + S(\bar{t}), \quad (\text{B.1})$$

sujeta a las condiciones de borde de Robin sobre la pared $\bar{r} = 1$ y las tapas $\bar{z} \in \{0, 1\}$, a la simetría axial en $\bar{r} = 0$ y a una condición inicial uniforme $\theta(\bar{r}, \bar{z}, 0) = \theta_0$.

Conviene trabajar con el campo medido respecto del ambiente,

$$\phi(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \theta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) - \theta_{\text{env}}, \quad (\text{B.2})$$

con lo que las condiciones de Robin se vuelven homogéneas, por ejemplo, en la pared, $\partial_{\bar{r}}\phi|_{\bar{r}=1} + \text{Bi}_R \phi|_{\bar{r}=1} = 0$ y la condición inicial pasa a ser $\phi(\bar{r}, \bar{z}, 0) = \theta_0 - \theta_{\text{env}}$. La ecuación (B.1) conserva su forma en ϕ , dado que θ_{env} es constante. La homogeneización de los bordes es la que habilita la expansión en autofunciones que sigue.

B.2. Separación de variables y problemas de autovalores

Se busca una base de autofunciones de la parte espacial de (B.1) que sea separable en las coordenadas radial y axial,

$$\psi_{nm}(\bar{r}, \bar{z}) = \mathcal{R}_n(\bar{r}) \mathcal{Z}_m(\bar{z}). \quad (\text{B.3})$$

B.2.1. Parte radial: autofunciones de Bessel

Sustituyendo (B.3) en el operador radial de (B.1) se obtiene, para $\mathcal{R}_n$, la ecuación de Bessel de orden cero

$$\mathcal{R}_n'' + \frac{1}{\bar{r}} \mathcal{R}_n' + \beta_n^2 \mathcal{R}_n = 0, \quad (\text{B.4})$$

cuya solución regular en el eje es la función de Bessel de primera especie

$$\mathcal{R}_n(\bar{r}) = J_0(\beta_n \bar{r}). \quad (\text{B.5})$$

La segunda solución independiente, Y_0 , se descarta por ser singular en $\bar{r} = 0$, lo que equivale a imponer la simetría axial $\partial_{\bar{r}}\phi|_{\bar{r}=0} = 0$. Los autovalores β_n quedan fijados por la condición de Robin en la pared $\bar{r} = 1$. Usando la identidad $J_0'(x) = -J_1(x)$, la condición $\mathcal{R}_n'(1) + \text{Bi}_R \mathcal{R}_n(1) = 0$ conduce a la ecuación trascendente

$$\beta_n J_1(\beta_n) = \text{Bi}_R J_0(\beta_n), \quad (\text{B.6})$$

cuyas raíces positivas $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ se obtienen numéricamente. Las autofunciones radiales son ortogonales con peso $\bar{r}$ y su norma es

$$\mathcal{N}_n^r = \int_0^1 J_0(\beta_n \bar{r})^2 \bar{r} d\bar{r} = \frac{1}{2} (J_0(\beta_n)^2 + J_1(\beta_n)^2). \quad (\text{B.7})$$

B.2.2. Parte axial: modos cosenoidales

Para la parte axial, la simetría del problema respecto del plano medio $\bar{z} = \frac{1}{2}$, ambas tapas comparten el mismo Bi_H , sugiere expresar los modos centrados en esa altura,

$$\mathcal{Z}_m(\bar{z}) = \cos\left(\gamma_m \left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right)\right), \quad (\text{B.8})$$

que satisfacen $\mathcal{Z}_m'' + \gamma_m^2 \mathcal{Z}_m = 0$. Imponer la condición de Robin sobre cualquiera de las tapas da la ecuación trascendente de los autovalores axiales

$$\gamma_m \tan(\gamma_m/2) = \text{Bi}_H, \quad (\text{B.9})$$

cuyas raíces $\{\gamma_m\}_{m \geq 1}$ corresponden a los modos simétricos respecto del plano medio. La norma de estos modos es

$$\mathcal{N}_m^z = \int_0^1 \cos^2\left(\gamma_m \left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right)\right) d\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sin \gamma_m}{2 \gamma_m}. \quad (\text{B.10})$$

B.3. Proyección de la condición inicial y de la fuente

El campo se expande en la base de autofunciones,

$$\phi(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_n \sum_m c_{nm}(\bar{t}) J_0(\beta_n \bar{r}) \cos\left(\gamma_m \left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right)\right), \quad (\text{B.11})$$

con coeficientes temporales $c_{nm}(\bar{t})$ por determinar. Tanto la condición inicial como la fuente, ambas uniformes en el espacio, se proyectan sobre la base mediante los productos internos con peso $\bar{r}$ en lo radial y peso unidad en lo axial. La proyección de una constante

espacial unitaria sobre cada modo define el coeficiente

$$P_{nm} = \underbrace{\frac{1}{\mathcal{N}_n^r} \int_0^1 J_0(\beta_n \bar{r}) \bar{r} d\bar{r}}_{= J_1(\beta_n)/\beta_n / \mathcal{N}_n^r} \cdot \underbrace{\frac{1}{\mathcal{N}_m^z} \int_0^1 \cos(\gamma_m(\bar{z} - \frac{1}{2})) d\bar{z}}_{= (2/\gamma_m) \sin(\gamma_m/2) / \mathcal{N}_m^z}, \quad (\text{B.12})$$

donde se usaron las integrales $\int_0^1 J_0(\beta_n \bar{r}) \bar{r} d\bar{r} = J_1(\beta_n)/\beta_n$ y $\int_0^1 \cos(\gamma_m(\bar{z} - \frac{1}{2})) d\bar{z} = (2/\gamma_m) \sin(\gamma_m/2)$. El coeficiente P_{nm} es, por tanto, el peso con que una distribución espacialmente uniforme, sea la condición inicial, sea la fuente instantánea, carga sobre el modo (n, m) .

B.4. Evolución temporal: integral de Duhamel

Sustituyendo la expansión (B.11) en (B.1) y proyectando sobre el modo (n, m) , cada coeficiente $c_{nm}(\bar{t})$ satisface una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, desacoplada de los demás modos,

$$\frac{dc_{nm}}{d\bar{t}} + \lambda_{nm} c_{nm} = P_{nm} S(\bar{t}), \quad \lambda_{nm} = \text{Fo}_R \beta_n^2 + \text{Fo}_H \gamma_m^2, \quad (\text{B.13})$$

donde la tasa de decaimiento λ_{nm} combina la difusión radial y axial del modo. La solución de (B.13), con condición inicial $c_{nm}(0)$ dada por la proyección del estado inicial, es la integral de Duhamel

$$c_{nm}(\bar{t}) = c_{nm}(0) e^{-\lambda_{nm} \bar{t}} + P_{nm} \int_0^{\bar{t}} e^{-\lambda_{nm}(\bar{t}-\tau)} S(\tau) d\tau, \quad (\text{B.14})$$

con

$$c_{nm}(0) = (\theta_0 - \theta_{\text{env}}) P_{nm}. \quad (\text{B.15})$$

El primer término de (B.14) describe el decaimiento del estado inicial hacia el equilibrio con el ambiente; el segundo, la respuesta forzada acumulada de la fuente, ponderada por el núcleo exponencial de memoria $e^{-\lambda_{nm}(\bar{t}-\tau)}$.

B.5. Solución y evaluación numérica

Reconstruyendo (B.11) y deshaciendo el corrimiento (B.2), la solución analítica es

$$\theta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \theta_{\text{env}} + \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^N c_{nm}(\bar{t}) J_0(\beta_n \bar{r}) \cos(\gamma_m(\bar{z} - \frac{1}{2})), \quad (\text{B.16})$$

con $c_{nm}(\bar{t})$ dado por (B.14). La serie se trunca a M modos radiales y N axiales, número suficiente para alcanzar la convergencia en el rango de números de Fourier y Biot de los experimentos.

En la práctica, las raíces β_n y γ_m se obtienen resolviendo numéricamente las ecuaciones trascendentes (B.6) y (B.9), y la integral de convolución (B.14) se evalúa sobre una grilla temporal uniforme $\{\bar{t}_k\}$ mediante una recurrencia con regla trapezoidal. Definiendo $f_{nm}(\bar{t}) = P_{nm} S(\bar{t})$ y el factor de propagación de un paso $E_{nm} = e^{-\lambda_{nm} \Delta \bar{t}}$, la recurrencia es

$$c_{nm}(\bar{t}_{k+1}) = E_{nm} c_{nm}(\bar{t}_k) + \frac{1}{2} \Delta \bar{t} (E_{nm} f_{nm}(\bar{t}_k) + f_{nm}(\bar{t}_{k+1})), \quad (\text{B.17})$$

inicializada con $c_{nm}(\bar{t}_0) = (\theta_0 - \theta_{\text{env}}) P_{nm}$. El campo en cualquier punto $(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t})$ se recupera evaluando (B.16) con los coeficientes interpolados sobre la grilla temporal.

La derivación supone temperatura ambiente θ_{env} constante, condición que habilita la homogeneización de los bordes en (B.2) y el desacople modal de (B.13). Cuando la temperatura ambiente varía en el tiempo, el corrimiento por una constante deja de homogeneizar las condiciones de borde y la expansión en autofunciones con autovalores fijos pierde validez. Por ese motivo, la solución analítica se emplea como referencia exacta únicamente en los experimentos con ambiente constante; en los casos con ambiente variable la referencia de validación es la simulación de elementos finitos.

Apéndice C

Configuración experimental y de sensores

Este anexo reúne los parámetros que definen la configuración de los experimentos y que dan reproducibilidad a la metodología: las propiedades físicas de la probeta y del material, los grupos adimensionales que de ellas se derivan, las coordenadas de los nodos sensorizados y las configuraciones de sensores empleadas en cada fase, los niveles de ruido y los hiperparámetros base de las redes. Los valores corresponden a la formulación adimensional del Anexo A y a la solución analítica del Anexo B.

C.1. Parámetros físicos

La probeta cilíndrica modelada y las propiedades termofísicas del material se resumen en la Tabla C.1. Estos valores definen la geometría del dominio, la difusividad térmica $\alpha = k/(\rho c_p)$ y el intercambio convectivo en las superficies.

El horizonte temporal $T_{\max}$ no es fijo: se ajusta en cada experimento según la escala temporal de la fuente de referencia, lo que a su vez determina la adimensionalización del tiempo. Por ello, los números de Fourier $\text{Fo}_R = \alpha T_{\max}/R^2$ y $\text{Fo}_H = \alpha T_{\max}/H^2$ varían entre experimentos, mientras que los números de Biot $\text{Bi}_R = \beta R/k$ y $\text{Bi}_H = \beta H/k$, al depender solo de propiedades fijas, son comunes a todos los casos:

$$\text{Bi}_R = \frac{\beta R}{k} \approx 0,0602, \quad \text{Bi}_H = \frac{\beta H}{k} \approx 0,2407. \quad (\text{C.1})$$

Parámetro	Símbolo	Valor
Radio de la probeta	R	0,0375 m
Altura de la probeta	H	0,150 m
Conductividad térmica	k	$1,495\,83 \times 10^{-3}$
Densidad	ρ	2476,0
Calor específico	c_p	1,023
Producto ρc_p	ρc_p	2532,95
Difusividad térmica	α	$5,906 \times 10^{-7}$
Coef. de transferencia (Robin)	β	$2,4 \times 10^{-3}$
Temperatura ambiente (constante)	T_{env}	20 °C

Tabla C.1: Parámetros físicos de la probeta y del material.

A modo de referencia, para el horizonte del caso base ($T_{\text{max}} = 10\,000$ s) los números de Fourier toman los valores $\text{Fo}_R \approx 4,20$ y $\text{Fo}_H \approx 0,26$.

C.2. Configuraciones de sensores

Los datos de temperatura provienen de nodos sensorizados del modelo de elementos finitos, situados sobre el plano axisimétrico (r, z) de la probeta. Cada configuración de sensores selecciona un subconjunto de esos nodos como datos de entrenamiento; los nodos no seleccionados quedan como conjunto held-out para los diagnósticos de generalización. Las dos fases de la investigación emplearon mallas de nodos distintas, con numeración y densidad radial propias, por lo que se documentan por separado.

C.2.1. Fase exploratoria

La fase exploratoria, en la que se validó la inversión bajo condición de Dirichlet reduciendo progresivamente la cobertura, empleó el conjunto de doce nodos de la Tabla C.2. Las configuraciones de sensores $N = 12, 6, 4, 3, 1$ seleccionan los subconjuntos indicados en la Tabla C.3.

C.2.2. Fase experimental

La fase experimental, en la que se realizó la identificación inversa bajo condición de Robin, empleó el conjunto de nueve nodos de la Tabla C.4, cuya disposición sobre el plano

ID nodo	r [m]	z [m]	$(\bar{r}, \bar{z})$
113	0,000000	0,075000	(0,000; 0,500)
940	0,019625	0,075000	(0,523; 0,500)
943	0,035696	0,075000	(0,952; 0,500)
116	0,000000	0,102806	(0,000; 0,685)
958	0,019625	0,102806	(0,523; 0,685)
982	0,019625	0,129920	(0,523; 0,866)
961	0,035696	0,102806	(0,952; 0,685)
120	0,000000	0,129920	(0,000; 0,866)
985	0,035696	0,129920	(0,952; 0,866)
124	0,000000	0,145652	(0,000; 0,971)
1006	0,019625	0,145652	(0,523; 0,971)
1009	0,035696	0,145652	(0,952; 0,971)

Tabla C.2: Coordenadas de los nodos sensorizados de la fase exploratoria.

N	Nodos seleccionados
12	todos los nodos de la Tabla C.2
6	113, 943, 958, 120, 1006, 1009
4	113, 943, 124, 1009
3	113, 943, 124
1	124

Tabla C.3: Subconjuntos de nodos por configuración de sensores en la fase exploratoria.

axisimétrico de la probeta se ilustra en la Figura 4.6 del cuerpo. Las configuraciones de sensores se denotan A, B, C y D, con cobertura decreciente de nueve a un único nodo, según la Tabla C.5. La configuración A, que emplea los nueve nodos, es la del caso base de referencia.

C.3. Niveles de ruido

A las mediciones de temperatura se les añadió ruido gaussiano aditivo de media nula y desviación estándar creciente, para evaluar la robustez de la reconstrucción frente a la incertidumbre instrumental. Los cuatro niveles empleados se identifican con las etiquetas de la Tabla C.6.

ID nodo	r [m]	z [m]	$(\bar{r}, \bar{z})$
113	0,000000	0,075000	(0,000; 0,500)
941	0,026764	0,075000	(0,714; 0,500)
943	0,035696	0,075000	(0,952; 0,500)
117	0,000000	0,110652	(0,000; 0,738)
965	0,026764	0,110652	(0,714; 0,738)
967	0,035696	0,110652	(0,952; 0,738)
125	0,000000	0,147806	(0,000; 0,985)
1013	0,026764	0,147806	(0,714; 0,985)
1015	0,035696	0,147806	(0,952; 0,985)

Tabla C.4: Coordenadas de los nodos sensorizados de la fase experimental.

Config.	N	Nodos seleccionados
A	9	113, 941, 965, 1013, 943, 967, 117, 125, 1015
B	4	1015, 125, 113, 943
C	3	125, 1015, 943
D	1	943

Tabla C.5: Subconjuntos de nodos por configuración de sensores en la fase experimental.

C.4. Hiperparámetros base

La Tabla C.7 reúne los hiperparámetros base de las dos redes de la configuración inversa: la red de campo de temperatura u_θ y la red de fuente s_ϕ . Estos valores constituyen la configuración de referencia; para experimentos específicos, en particular los de la curva de Arrieta, la profundidad y el ancho de la red y la densidad de puntos de colocación se modificaron según el estudio de sensibilidad correspondiente, lo que se documenta en cada caso.

Los pesos de los términos de la función de pérdida se fijan de forma empírica por experimento. En la configuración de referencia toman los valores $w_{\text{data}} = 100$, $w_{\text{pde}} = 10$, $w_{\text{wall}} = 10$, $w_{\text{top}} = w_{\text{bot}} = 5$, $w_{\text{sym}} = 1$ y $w_{\text{ic}} = 100$. El factor de escala de temperatura T_{sc} y el de la fuente s_{sc} se adaptan automáticamente al rango térmico y a la magnitud de los datos de cada experimento, según se describió en el Anexo A.

Config.	σ [°C]	Descripción
A	0,0	sin ruido (datos limpios)
B	0,5	ruido bajo
C	1,0	ruido moderado
D	2,0	ruido alto

Tabla C.6: Niveles de ruido de medición.

Hiperparámetro	Red de campo u_θ	Red de fuente s_ϕ
Capas ocultas	6	4
Neuronas por capa	256	64
Dimensión del embedding de Fourier	64	32
Escala del embedding de Fourier	1,0	5,0
<i>Parámetros comunes de entrenamiento</i>		
Bloques causales	32	
Parámetro causal ε	0,01	
<i>Learning rate</i> inicial	5×10^{-4}	
Decaimiento del <i>learning rate</i>	exponencial ($\times 0,9$ cada 8000 pasos)	
Recorte de gradiente (norma global)	1,0	
Pasos de entrenamiento	40 000	
Tamaño de lote (interior / borde / inicial)	4096 / 1024 / 1024	
Fracción de muestreo por importancia	0,5	
Fracción de validación held-out	0,15	

Tabla C.7: Hiperparámetros base de las redes en la configuración inversa.

Apéndice D

Plan completo de experimentos y resultados

Este anexo recopila la totalidad de los resultados de la fase experimental del estudio. Cada corrida corresponde a una combinación de fuente interna, condición ambiental, configuración de sensores y nivel de ruido, evaluada bajo condición de borde de Robin. Las métricas se obtuvieron procesando los registros individuales de cada experimento. Para cada corrida se reportan: el error de reconstrucción del campo de temperatura (RMSE y coeficiente de determinación R^2 del problema directo), la calidad de la fuente recuperada (R^2 de la fuente, error relativo de energía y error relativo del valor pico), el cociente de pérdida validación/entrenamiento como diagnóstico de sobreajuste, y el tiempo de cómputo. Las configuraciones de sensores (A–D) y de ruido (A–D) son las definidas en el Anexo C.

Los resultados se presentan primero agrupados por campaña experimental (Sección D.1), lo que facilita la comparación dentro de cada escenario, y luego de forma consolidada en una tabla maestra (Sección D.2).

D.1. Resultados por campaña

D.1.1. Barridos sensor–ruido

Las campañas con cobertura completa del espacio sensor–ruido (cuatro configuraciones de sensores por cuatro niveles de ruido) se presentan en las Tablas D.1–D.6.

Sens.	Ruido	N	RMSE_{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	$E_{\text{err}} [\%]$	pico [%]	t [s]
A	A	9	0.0035	1.00000	1.0000	0.11	0.46	1322
A	B	9	0.0559	0.99986	0.9993	0.21	0.82	714
A	C	9	0.1119	0.99946	0.9979	0.03	1.47	698
A	D	9	0.2895	0.99637	0.9903	0.97	3.26	614
B	A	4	0.0052	1.00000	1.0000	0.04	0.96	1246
B	B	4	0.0727	0.99977	0.9981	0.45	1.85	623
B	C	4	0.1415	0.99913	0.9928	0.29	5.05	598
B	D	4	0.4243	0.99219	0.9423	0.82	14.31	718
C	A	3	0.0060	1.00000	1.0000	0.09	0.81	1268
C	B	3	0.0732	0.99977	0.9987	1.53	0.41	621
C	C	3	0.1388	0.99917	0.9949	2.28	0.83	637
C	D	3	0.4067	0.99283	0.9417	4.54	5.28	880
D	A	1	0.0052	1.00000	1.0000	0.12	0.87	1488
D	B	1	0.0695	0.99979	0.9961	0.79	5.38	877
D	C	1	0.1389	0.99916	0.9905	0.57	9.37	594
D	D	1	0.3477	0.99476	0.9132	0.39	45.33	907

Tabla D.1: Resultados de la campaña: Fuente gaussiana 1, ambiente constante.

Sens.	Ruido	N	RMSE_{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	$E_{\text{err}} [\%]$	pico [%]	t [s]
A	A	9	0.0122	1.00000	0.9988	0.34	0.50	1836
A	B	9	0.0362	0.99999	0.9986	0.87	0.17	1420
A	C	9	0.0748	0.99997	0.9983	1.61	1.27	1138
A	D	9	0.1496	0.99989	0.9966	3.43	4.23	773
B	A	4	0.1777	0.99985	0.9959	1.97	6.79	661
B	B	4	0.0986	0.99995	0.9979	0.29	4.39	841
B	C	4	0.1336	0.99991	0.9978	0.50	3.21	660
B	D	4	0.2056	0.99980	0.9961	2.14	4.63	769
C	A	3	0.0181	1.00000	0.9988	0.24	0.59	1372
C	B	3	0.0557	0.99999	0.9985	0.10	1.35	1230
C	C	3	0.1084	0.99994	0.9979	0.32	2.29	1165
C	D	3	0.2364	0.99973	0.9958	3.76	3.76	748
D	A	1	0.0519	0.99999	0.9988	0.35	1.00	1265
D	B	1	0.2190	0.99977	0.9970	1.96	5.03	913
D	C	1	0.3901	0.99927	0.9939	4.70	8.68	648
D	D	1	0.4801	0.99889	0.9928	3.02	10.04	595

Tabla D.2: Resultados de la campaña: Fuente gaussiana 2, ambiente constante.

Sens.	Ruido	N	RMSE_{fwd}	R_{fwd}^2	R_{src}^2	$E_{\text{err}} [\%]$	pico [%]	t [s]
A	A	9	0.1210	0.99995	0.9740	0.70	0.17	902
A	B	9	0.1084	0.99996	0.9765	0.43	0.70	943
A	C	9	0.0949	0.99997	0.9877	1.31	4.01	1917
A	D	9	0.1896	0.99989	0.9725	1.35	3.46	899
B	A	4	0.1335	0.99994	0.9765	0.66	0.01	945
B	B	4	0.2313	0.99983	0.9600	1.51	0.74	669
B	C	4	0.1437	0.99993	0.9734	0.68	2.13	944
B	D	4	0.2357	0.99982	0.9752	2.13	1.21	976
C	A	3	0.1047	0.99997	0.9776	0.71	0.36	948
C	B	3	0.1505	0.99993	0.9743	3.32	1.51	903
C	C	3	0.1219	0.99995	0.9788	1.80	0.55	1061
C	D	3	0.2213	0.99985	0.9698	1.98	0.72	734
D	A	1	0.2651	0.99978	0.9716	1.75	0.39	867
D	B	1	0.3291	0.99966	0.9638	2.10	2.38	724
D	C	1	0.4328	0.99941	0.9600	3.30	3.30	668
D	D	1	0.4478	0.99937	0.9614	3.15	3.52	699

Tabla D.3: Resultados de la campaña: Fuente rectangular, ambiente constante.

Sens.	Ruido	N	RMSE_{fwd}	R_{fwd}^2	R_{src}^2	$E_{\text{err}} [\%]$	pico [%]	t [s]
A	A	9	0.0115	0.99999	0.9991	8.18	1.29	1240
A	B	9	0.0537	0.99987	0.9983	7.90	2.98	689
A	C	9	0.1097	0.99948	0.9972	7.75	2.23	639
A	D	9	0.2703	0.99683	0.9854	7.93	0.76	667
B	A	4	0.0471	0.99990	0.9990	8.36	1.45	1087
B	B	4	0.0927	0.99963	0.9975	7.91	1.44	621
B	C	4	0.1598	0.99889	0.9919	7.91	4.46	618
B	D	4	0.4169	0.99246	0.9481	5.81	12.07	675
C	A	3	0.0575	0.99986	0.9990	8.27	1.73	980
C	B	3	0.0966	0.99960	0.9978	7.10	1.68	690
C	C	3	0.1833	0.99854	0.9926	8.05	0.53	709
C	D	3	0.3543	0.99456	0.9603	1.71	4.88	688
D	A	1	0.0666	0.99981	0.9991	8.06	1.50	1490
D	B	1	0.0910	0.99964	0.9963	7.31	3.99	858
D	C	1	0.1488	0.99904	0.9886	8.20	9.65	656
D	D	1	0.3422	0.99492	0.9312	5.02	38.41	759

Tabla D.4: Resultados de la campaña: Fuente gaussiana 1, ambiente constante (repetición).

Sens.	Ruido	N	RMSE_{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	$E_{\text{err}} [\%]$	pico $[\%]$	t [s]
A	A	9	0.0489	0.99919	0.9213	15.65	20.87	1830
A	B	9	0.0612	0.99874	0.8900	19.72	24.67	1718
A	C	9	0.0959	0.99690	0.8411	23.99	25.05	1232
A	D	9	0.1452	0.99288	0.6448	34.80	22.49	975
B	A	4	0.0478	0.99923	0.9665	9.06	11.23	1778
B	B	4	0.0904	0.99724	0.8853	11.84	12.88	1149
B	C	4	0.1109	0.99585	0.8174	12.37	8.13	1085
B	D	4	0.2003	0.98646	0.5372	7.54	16.05	729
C	A	3	0.0941	0.99701	0.7778	16.26	32.88	1271
C	B	3	0.1047	0.99630	0.7768	10.16	35.40	1377
C	C	3	0.1847	0.98848	0.5277	12.91	48.76	992
C	D	3	0.3336	0.96245	0.0093	14.67	57.11	736
D	A	1	0.2466	0.97947	0.8036	13.02	33.81	1734
D	B	1	0.4834	0.92115	0.4625	13.72	46.04	1440
D	C	1	1.0574	0.62266	-1.9270	48.24	48.19	760
D	D	1	1.1797	0.53031	-3.1444	78.46	53.63	702

Tabla D.5: Resultados de la campaña: Fuente de Arrieta, ambiente constante.

Sens.	Ruido	N	RMSE_{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	$E_{\text{err}} [\%]$	pico $[\%]$	t [s]
A	A	9	0.1488	0.99584	0.5641	34.17	29.09	1872
A	B	9	0.1690	0.99464	0.6898	32.25	26.93	1863
A	C	9	0.1937	0.99295	0.5669	38.65	30.89	1863
A	D	9	0.2176	0.99111	0.3999	45.03	32.53	1857
B	A	4	0.1563	0.99541	0.4831	24.98	29.45	1817
B	B	4	0.1779	0.99406	0.5087	23.39	20.00	1821
B	C	4	0.2034	0.99223	0.4500	22.12	31.13	1855
B	D	4	0.2812	0.98515	0.2954	15.30	25.65	1821
C	A	3	0.2484	0.98841	0.0814	34.46	29.98	1794
C	B	3	0.2855	0.98468	0.0349	33.27	29.54	1776
C	C	3	0.2964	0.98350	0.0586	27.81	32.95	1761
C	D	3	0.3911	0.97127	-0.2168	16.71	22.92	1799
D	A	1	1.3203	0.67256	-2.2942	43.55	3.64	1750
D	B	1	1.4273	0.61731	-3.6306	44.68	15.98	1782
D	C	1	1.3657	0.64963	-2.7335	41.90	0.70	1741
D	D	1	1.4113	0.62584	-2.7501	42.44	3.29	1751

Tabla D.6: Resultados de la campaña: Fuente de Arrieta, ambiente sinusoidal 20 ± 5 °C.

Campaña	n	Mediana	Mín.	Máy.
Gauss 1 / ambiente constante	35	11,9	9,9	26,3
Gauss 2 / ambiente constante	16	14,6	9,9	30,6
Rectangular / ambiente constante	16	15,0	11,1	32,0
Arrieta / ambiente constante	16	19,8	11,7	30,5
Arrieta / ambiente senoidal $\pm 5^\circ\text{C}$	16	30,1	29,0	31,2
Otros casos puntuales ¹	12	26,0	13,7	64,0
Total	111	17,7	9,9	64,0

Tabla D.7: Tiempo de cómputo en minutos de la identificación inversa por campaña. Todas las corridas se ejecutaron en una GPU NVIDIA GeForce RTX 4060 Ti, con 40 000 pasos de optimización y sin refinamiento L-BFGS. Los tiempos están en minutos.

D.1.2. Casos puntuales

Las campañas evaluadas en una única configuración de referencia (sensores A, sin ruido) se reúnen en la Tabla D.8.

Campaña	RMSE_{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	$E_{\text{err}} [\%]$	pico $[\%]$	val/tr	t [s]
Gaussiana 3	0.0038	1.00000	1.0000	0.07	0.85	1.04	1569
Gaussiana 4	0.0033	1.00000	1.0000	0.00	0.70	1.00	1264
Gaussiana 5	0.0068	1.00000	0.9999	0.09	1.27	1.06	824
Gaussiana 1 (rep. 1)	0.0060	1.00000	0.9998	4.12	0.51	1.00	1579
Gaussiana 1 (rep. 2)	0.0109	0.99999	0.9991	8.07	0.12	1.00	1467
Gaussiana 1 (rep. 3)	0.0065	1.00000	0.9998	3.90	0.78	0.98	1328
Arrieta seno ± 2	0.0579	0.99873	0.9218	15.50	19.48	1.01	1905
Arrieta seno ± 1	0.0468	0.99915	0.9614	8.91	12.78	1.00	1881

Tabla D.8: Resultados de los casos puntuales evaluados en configuración de referencia (sensores A, ruido A).

D.1.3. Estudio de ablación

El estudio de ablación evaluó la sensibilidad de la reconstrucción a la profundidad de la red de campo, a su ancho y a la densidad de puntos de colocación, manteniendo fijos la fuente (Arrieta), la configuración de sensores (B), el nivel de ruido (B) y el resto de hiperparámetros. La Tabla D.9 resume las siete variantes.

¹Gauss 3–5, ambiente senoidal ± 1 y $\pm 2^\circ\text{C}$ y el estudio de ablación de arquitectura.

Variante	RMSE_{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	$E_{\text{err}} [\%]$	pico [%]	t [s]
Base	0.0861	0.9972	0.8751	11.34	19.86	1550
Prof. alta	0.0784	0.9977	0.8536	15.51	24.36	2202
Prof. baja	0.0766	0.9978	0.9294	2.86	6.22	1447
Ancho alto	0.1203	0.9945	0.4240	47.04	50.92	3265
Ancho bajo	0.0815	0.9975	0.9230	2.70	8.34	1162
Densidad alta	0.0871	0.9971	0.8941	6.85	10.01	3839
Densidad baja	0.0798	0.9976	0.7636	26.38	34.03	1063

Tabla D.9: Estudio de ablación sobre profundidad, ancho y densidad de colocación (fuente de Arrieta, ambiente senoidal de ± 1 °C, sensores B, ruido B).

D.2. Tabla maestra consolidada

La Tabla D.10 consolida la totalidad de las corridas de la fase experimental en un único listado, ordenadas por campaña y configuración.

Tabla D.10: Resultados consolidados de todas las corridas de la fase experimental.

Camp.	Config.	RMSE _{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	E_{err} [%]	pico [%]	val/tr	t [s]
1	sens A, ruido A	0.0035	1.00000	1.0000	0.11	0.46	1.05	1322
	sens A, ruido B	0.0559	0.99986	0.9993	0.21	0.82	1.00	714
	sens A, ruido C	0.1119	0.99946	0.9979	0.03	1.47	1.00	698
	sens A, ruido D	0.2895	0.99637	0.9903	0.97	3.26	1.01	614
	sens B, ruido A	0.0052	1.00000	1.0000	0.04	0.96	1.15	1246
	sens B, ruido B	0.0727	0.99977	0.9981	0.45	1.85	1.01	623
	sens B, ruido C	0.1415	0.99913	0.9928	0.29	5.05	1.01	598
	sens B, ruido D	0.4243	0.99219	0.9423	0.82	14.31	0.99	718
	sens C, ruido A	0.0060	1.00000	1.0000	0.09	0.81	1.13	1268
	sens C, ruido B	0.0732	0.99977	0.9987	1.53	0.41	0.96	621
	sens C, ruido C	0.1388	0.99917	0.9949	2.28	0.83	0.96	637
	sens C, ruido D	0.4067	0.99283	0.9417	4.54	5.28	1.01	880
	sens D, ruido A	0.0052	1.00000	1.0000	0.12	0.87	1.13	1488
	sens D, ruido B	0.0695	0.99979	0.9961	0.79	5.38	1.14	877
	sens D, ruido C	0.1389	0.99916	0.9905	0.57	9.37	1.21	594
	sens D, ruido D	0.3477	0.99476	0.9132	0.39	45.33	1.03	907
2	sens A, ruido A	0.0122	1.00000	0.9988	0.34	0.50	1.02	1836
	sens A, ruido B	0.0362	0.99999	0.9986	0.87	0.17	1.01	1420
	sens A, ruido C	0.0748	0.99997	0.9983	1.61	1.27	1.02	1138
	sens A, ruido D	0.1496	0.99989	0.9966	3.43	4.23	1.01	773
	sens B, ruido A	0.1777	0.99985	0.9959	1.97	6.79	0.94	661
	sens B, ruido B	0.0986	0.99995	0.9979	0.29	4.39	1.01	841
	sens B, ruido C	0.1336	0.99991	0.9978	0.50	3.21	1.02	660
	sens B, ruido D	0.2056	0.99980	0.9961	2.14	4.63	1.02	769
	sens C, ruido A	0.0181	1.00000	0.9988	0.24	0.59	1.01	1372
	sens C, ruido B	0.0557	0.99999	0.9985	0.10	1.35	1.02	1230
	sens C, ruido C	0.1084	0.99994	0.9979	0.32	2.29	1.00	1165
	sens C, ruido D	0.2364	0.99973	0.9958	3.76	3.76	1.01	748

continúa en la página siguiente

Tabla D.10 – *continuación*

Camp.	Config.	RMSE _{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	E_{err} [%]	pico [%]	val/tr	t [s]
	sens D, ruido A	0.0519	0.99999	0.9988	0.35	1.00	0.87	1265
	sens D, ruido B	0.2190	0.99977	0.9970	1.96	5.03	1.05	913
	sens D, ruido C	0.3901	0.99927	0.9939	4.70	8.68	0.99	648
	sens D, ruido D	0.4801	0.99889	0.9928	3.02	10.04	1.01	595
3	sens A, ruido A	0.1210	0.99995	0.9740	0.70	0.17	1.05	902
	sens A, ruido B	0.1084	0.99996	0.9765	0.43	0.70	1.05	943
	sens A, ruido C	0.0949	0.99997	0.9877	1.31	4.01	1.01	1917
	sens A, ruido D	0.1896	0.99989	0.9725	1.35	3.46	1.01	899
	sens B, ruido A	0.1335	0.99994	0.9765	0.66	0.01	0.97	945
	sens B, ruido B	0.2313	0.99983	0.9600	1.51	0.74	0.98	669
	sens B, ruido C	0.1437	0.99993	0.9734	0.68	2.13	0.97	944
	sens B, ruido D	0.2357	0.99982	0.9752	2.13	1.21	1.01	976
	sens C, ruido A	0.1047	0.99997	0.9776	0.71	0.36	0.92	948
	sens C, ruido B	0.1505	0.99993	0.9743	3.32	1.51	0.96	903
	sens C, ruido C	0.1219	0.99995	0.9788	1.80	0.55	1.03	1061
	sens C, ruido D	0.2213	0.99985	0.9698	1.98	0.72	0.99	734
	sens D, ruido A	0.2651	0.99978	0.9716	1.75	0.39	1.02	867
	sens D, ruido B	0.3291	0.99966	0.9638	2.10	2.38	1.10	724
	sens D, ruido C	0.4328	0.99941	0.9600	3.30	3.30	1.10	668
	sens D, ruido D	0.4478	0.99937	0.9614	3.15	3.52	1.05	699
4	sens A, ruido A	0.0038	1.00000	1.0000	0.07	0.85	1.04	1569
5	sens A, ruido A	0.0033	1.00000	1.0000	0.00	0.70	1.00	1264
6	sens A, ruido A	0.0068	1.00000	0.9999	0.09	1.27	1.06	824
7	sens A, ruido A	0.0115	0.99999	0.9991	8.18	1.29	1.01	1240
	sens A, ruido B	0.0537	0.99987	0.9983	7.90	2.98	1.00	689
	sens A, ruido C	0.1097	0.99948	0.9972	7.75	2.23	0.99	639
	sens A, ruido D	0.2703	0.99683	0.9854	7.93	0.76	1.03	667
	sens B, ruido A	0.0471	0.99990	0.9990	8.36	1.45	1.08	1087
	sens B, ruido B	0.0927	0.99963	0.9975	7.91	1.44	1.01	621
	sens B, ruido C	0.1598	0.99889	0.9919	7.91	4.46	1.01	618
	sens B, ruido D	0.4169	0.99246	0.9481	5.81	12.07	1.01	675
	sens C, ruido A	0.0575	0.99986	0.9990	8.27	1.73	1.00	980
	sens C, ruido B	0.0966	0.99960	0.9978	7.10	1.68	0.97	690

continúa en la página siguiente

Tabla D.10 – *continuación*

Camp.	Config.	RMSE _{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	E_{err} [%]	pico [%]	val/tr	t [s]
	sens C, ruido C	0.1833	0.99854	0.9926	8.05	0.53	0.97	709
	sens C, ruido D	0.3543	0.99456	0.9603	1.71	4.88	1.00	688
	sens D, ruido A	0.0666	0.99981	0.9991	8.06	1.50	0.97	1490
	sens D, ruido B	0.0910	0.99964	0.9963	7.31	3.99	1.17	858
	sens D, ruido C	0.1488	0.99904	0.9886	8.20	9.65	1.18	656
	sens D, ruido D	0.3422	0.99492	0.9312	5.02	38.41	1.00	759
8	sens A, ruido A	0.0060	1.00000	0.9998	4.12	0.51	1.00	1579
9	sens A, ruido A	0.0109	0.99999	0.9991	8.07	0.12	1.00	1467
10	sens A, ruido A	0.0065	1.00000	0.9998	3.90	0.78	0.98	1328
11	sens A, ruido A	0.0489	0.99919	0.9213	15.65	20.87	1.00	1830
	sens A, ruido B	0.0612	0.99874	0.8900	19.72	24.67	1.01	1718
	sens A, ruido C	0.0959	0.99690	0.8411	23.99	25.05	1.01	1232
	sens A, ruido D	0.1452	0.99288	0.6448	34.80	22.49	1.00	975
	sens B, ruido A	0.0478	0.99923	0.9665	9.06	11.23	1.00	1778
	sens B, ruido B	0.0904	0.99724	0.8853	11.84	12.88	1.03	1149
	sens B, ruido C	0.1109	0.99585	0.8174	12.37	8.13	1.00	1085
	sens B, ruido D	0.2003	0.98646	0.5372	7.54	16.05	0.99	729
	sens C, ruido A	0.0941	0.99701	0.7778	16.26	32.88	0.97	1271
	sens C, ruido B	0.1047	0.99630	0.7768	10.16	35.40	1.00	1377
	sens C, ruido C	0.1847	0.98848	0.5277	12.91	48.76	1.01	992
	sens C, ruido D	0.3336	0.96245	0.0093	14.67	57.11	0.98	736
	sens D, ruido A	0.2466	0.97947	0.8036	13.02	33.81	1.02	1734
	sens D, ruido B	0.4834	0.92115	0.4625	13.72	46.04	1.02	1440
	sens D, ruido C	1.0574	0.62266	-1.9270	48.24	48.19	0.98	760
	sens D, ruido D	1.1797	0.53031	-3.1444	78.46	53.63	0.94	702
12	sens A, ruido A	0.1488	0.99584	0.5641	34.17	29.09	1.00	1872
	sens A, ruido B	0.1690	0.99464	0.6898	32.25	26.93	1.03	1863
	sens A, ruido C	0.1937	0.99295	0.5669	38.65	30.89	1.03	1863
	sens A, ruido D	0.2176	0.99111	0.3999	45.03	32.53	1.02	1857
	sens B, ruido A	0.1563	0.99541	0.4831	24.98	29.45	1.08	1817
	sens B, ruido B	0.1779	0.99406	0.5087	23.39	20.00	1.01	1821
	sens B, ruido C	0.2034	0.99223	0.4500	22.12	31.13	0.99	1855
	sens B, ruido D	0.2812	0.98515	0.2954	15.30	25.65	0.97	1821

continúa en la página siguiente

Tabla D.10 – *continuación*

Camp.	Config.	RMSE _{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	E_{err} [%]	pico [%]	val/tr	t [s]
	sens C, ruido A	0.2484	0.98841	0.0814	34.46	29.98	0.99	1794
	sens C, ruido B	0.2855	0.98468	0.0349	33.27	29.54	1.02	1776
	sens C, ruido C	0.2964	0.98350	0.0586	27.81	32.95	1.03	1761
	sens C, ruido D	0.3911	0.97127	-0.2168	16.71	22.92	1.02	1799
	sens D, ruido A	1.3203	0.67256	-2.2942	43.55	3.64	1.01	1750
	sens D, ruido B	1.4273	0.61731	-3.6306	44.68	15.98	1.10	1782
	sens D, ruido C	1.3657	0.64963	-2.7335	41.90	0.70	1.12	1741
	sens D, ruido D	1.4113	0.62584	-2.7501	42.44	3.29	1.15	1751
13	sens A, ruido A	0.0579	0.99873	0.9218	15.50	19.48	1.01	1905
14	sens A, ruido A	0.0468	0.99915	0.9614	8.91	12.78	1.00	1881
15	Ancho alto	0.1203	0.99454	0.4240	47.04	50.92	1.01	3265
	Ancho bajo	0.0815	0.99749	0.9230	2.70	8.34	1.03	1162
	Base	0.0861	0.99720	0.8751	11.34	19.86	1.01	1550
	Densidad alta	0.0871	0.99713	0.8941	6.85	10.01	1.01	3839
	Densidad baja	0.0798	0.99759	0.7636	26.38	34.03	0.99	1063
	Prof. alta	0.0784	0.99768	0.8536	15.51	24.36	0.98	2202
	Prof. baja	0.0766	0.99778	0.9294	2.86	6.22	1.00	1447

Tabla D.10: Resultados consolidados de todas las corridas de la fase experimental.

Caso	RMSE _{fwd}	R^2_{fwd}	R^2_{src}	E_{err} [%]	pico [%]	t [s]
Arrieta, 9 sens, $\sigma = 0$	0.0474	0.9992	0.7212	5.48	17.48	1429
Arrieta, 9 sens, $\sigma = 1$	0.0964	0.9965	0.6365	17.03	27.77	1425
Arrieta, 9 sens, $\sigma = 2$	0.1589	0.9905	0.4701	25.31	26.61	1135
Arrieta, 4 sens, $\sigma = 0,5$	0.0916	0.9968	0.6531	5.29	20.05	1262
Arrieta, 1 sens, $\sigma = 2$	0.8292	0.7402	-0,5421	22.35	33.75	982
Gauss 1, 9 sens, $\sigma = 0$	0.0045	1.0000	0.9999	0.04	0.87	1151
Rectangular, 9 sens, $\sigma = 0$	0.0668	1.0000	0.9871	1.56	1.80	1708

Tabla D.11: Resultados de la red reducida (red del campo de temperatura de cuatro capas y 256 unidades, frente a las seis capas de la configuración estándar), ambiente constante. Las cinco primeras filas corresponden a la fuente de Arrieta en puntos representativos de la grilla de sensores y ruido; las dos últimas, a las fuentes bien identificables Gauss 1 y rectangular en el caso base. RMSE_{fwd} en °C; R^2_{fwd} es el ajuste del campo (PINN vs FEM) y R^2_{src} el de la fuente recuperada; E_{err} y pico son los errores relativos de energía y de valor máximo de la fuente.

Apéndice E

Unidades

Las magnitudes dimensionales se expresan en un sistema consistente kJ–kg–m–s–K (energía en kilojoules). Las temperaturas absolutas se dan en °C y los intervalos en K, equivalentes para diferencias. Los grupos de la formulación adimensional carecen de unidad.

Unidades base

m : metro — longitudes y coordenadas (R, H, r, z)

kg : kilogramo — masa

s : segundo — tiempo ($t, T_{\max}$)

°C : grado Celsius — temperaturas absolutas (T, T_{env}, T_0) y desviación del ruido (σ)

K : kelvin — intervalos de temperatura (ΔT y denominadores de k, c_p, β)

kJ : kilojoule — energía térmica

Unidades derivadas

kg/m³ : densidad (ρ)

m²/s : difusividad térmica (α)

kJ kg⁻¹K⁻¹ : calor específico (c_p)

kW m⁻¹K⁻¹ ($\equiv$ kJ s⁻¹m⁻¹K⁻¹) : conductividad térmica (k)

kW m⁻²K⁻¹ : coeficiente de transferencia convectiva, Robin (β)

kJ m⁻³K⁻¹ : capacidad calorífica volumétrica (ρc_p)

kW m⁻³ ($\equiv$ kJ m⁻³s⁻¹) : término fuente volumétrico ($\dot{Q}$)

kW m^{-3} ($\equiv \text{kJ m}^{-3}\text{s}^{-1}$) : tasa volumétrica de generación de calor, término fuente ($\dot{Q}$)

Otras (mención contextual)

MPa : resistencia a compresión (Revisión Bibliográfica)

kg/m^3 : dosis de cemento (Revisión Bibliográfica)

Magnitudes adimensionales

— : $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$, θ , S , Fo_R , Fo_H , Bi_R , Bi_H , R^2 , grado de hidratación $\alpha(t)$ y los pesos λ